9

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK R1

Modellering og dataanalyse

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

DATA OG REGRESJON

Gjennomsnittlig vekstfart

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Vekstfaktor

$$\frac{y_{i+1}}{y_i}$$

Avvik

$$\text{målt verdi} - \text{modellverdi}$$

EKSPONENTIELLE OG LOGISTISKE MODELLER

Eksponentiell modell

$$f(x) = a \cdot b^x = a \cdot e^{kx}$$

$$\text{der} \quad k = \ln b$$

Doblingstid

$$T = \frac{\ln 2}{\ln b}$$

Logistisk modell

$$N(t) = \frac{K}{1 + ae^{-rt}}$$

Startverdi

$$N(0) = \frac{K}{1 + a}$$

Vendepunkt

$$t = \frac{\ln a}{r}, \quad N = \frac{K}{2}$$

Største vekstfart

$$\frac{rK}{4}$$

TOLKNING

Vekstfart

$$f'(t) \text{ i enheten til } f$$

$$\text{per enhet til } t$$

Raskest vekst

$$f''(t) = 0$$

- Vurder alltid gyldighetsområdet til en modell.

9.1.1 Datasett i Python

9.1 Tabellen viser antall elever på en skole.

År	2018	2019	2020	2021	2022
Elever	420	435	450	465	480

a) Finn endringen hvert år.

b) Er veksten lineær eller eksponentiell?

c) Hvor mange elever blir det i 2025 hvis utviklingen fortsetter?

9.2 Tabellen viser verdien til en aksje.

År	0	1	2	3
Verdi	200	220	242	266,2

a) Finn vekstfaktoren hvert år.

b) Hvor mange prosent øker verdien per år?

c) Hva blir verdien etter 4 år?

9.3 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten fra tabellen.

t (min)	0	4	10	20
V (liter)	50	42	33	23

a) Fra $t = 0$ til $t = 4$

b) Fra $t = 10$ til $t = 20$

c) Fra $t = 0$ til $t = 20$

9.4 Er dataene lineære, eksponentielle eller ingen av delene?

a) $3, 6, 12, 24, 48$

b) $3, 6, 9, 12, 15$

c) $3, 6, 10, 15, 21$

d) $80, 40, 20, 10, 5$

9.5 Hva blir utskriften?

Python

```
y = [5, 8, 11, 14]
endring = []
for i in range(len(y) - 1):
    endring.append(y[i + 1] - y[i])
print(endring)
```

9.6 Hva blir utskriften?

Python

```
y = [100, 50, 25, 12.5]
for i in range(3):
    print(y[i + 1] / y[i])
```

9.7 Hva blir utskriften?

Python

```
temp = [12, 15, 19, 14, 10]
print(max(temp), min(temp), sum(temp) /
len(temp))
```

9.8 Hva blir utskriften?

Python

```
import csv
import io

tekst = """x,y
1,4
2,7
3,10"""
leser = csv.reader(io.StringIO(tekst))
next(leser)
for rad in leser:
    print(int(rad[0]) + int(rad[1]))
```

9.9 Finn feilen. Ola skriver `sum(tall) / len(tall)` der `tall = ["4", "6"]`, og får en feilmelding. Hva er galt?

9.10 Folketallet i en kommune var 8000 i 2010 og 9680 i 2020. Anta eksponentiell vekst. Finn vekstfaktoren per tiår og per år.

9.11 Hvilken variabel bør stå på x-aksen i et punktplott?

a) Temperaturen i en kopp gjennom en time

b) Høyden til elever og skostørrelsen deres

9.12 Endre programmet slik at det skriver ut vekstfaktoren i stedet for endringen.

Python

```
y = [2, 6, 18, 54]
for i in range(3):
    print(y[i + 1] - y[i])
```

9.13 Hva blir utskriften?

Python

```
x = [0, 1, 2, 3]
y = [1, 2, 5, 10]
for i in range(3):
    print(y[i + 1] - y[i])
```

Hvilken funksjonstype passer?

9.14 Et datasett har 1000 målinger. Forklar hvorfor det er lurt å bruke Python i stedet for å regne for hånd.

9.15 I 2000 var det 100 ulver i et område, og i 2020 var det 400. Finn doblingstiden hvis veksten er eksponentiell.

9.2.1 Modellering med kjent funksjon

EKSEMPEL *Lineær modell for folketallet*

En lineær regresjon av folketallet i Norge fra 1950 til 2020 gir omtrent $N(x) = 0{,}027\,x + 3{,}27$ millioner, der x er antall år etter 1950. Hva betyr tallene, og hva sier modellen om 2050?

Løsning

0,027 betyr at folketallet øker med omtrent 0,027 millioner, altså 27 000, per år. 3,27 er modellens verdi i 1950. For 2050 gir modellen $N(100) \approx 6{,}0$ millioner.

Avvikene viser at de siste målingene ligger *over* linja. Veksten har økt, så en lineær modell undervurderer trolig framtiden. ■

9.16 En lineær modell for prisen på en taxitur er $P(x) = 15x + 60$ kroner, der x er antall km.

a) Hva koster en tur på 12 km?

b) Hva betyr tallene 15 og 60?

c) Hvor langt kan du kjøre for 500 kroner?

9.17 Høyden til en plante er modellert ved $h(t) = 1{,}2\,t + 5$ cm, der t er antall uker.

a) Hvor høy var planten ved start?

b) Hvor mye vokser den per uke?

c) Når er den 29 cm høy?

9.18 En andregradsmodell for høyden til en ball er $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$.

a) Når er ballen høyest?

b) Hvor høyt er den da?

c) Hva betyr tallet 2?

9.19 Finn avvikene (målt minus modell) for modellen $f(x) = 3x + 1$.

x	1	2	3
målt	4,2	6,7	10,3

9.20 To modeller for de samme dataene har summen av kvadrerte avvik 12,5 og 3,1. Hvilken passer best? Er det nok til å velge den?

9.21 Hvilken funksjonstype ville du valgt?

a) Strekningen til en bil som akselererer jevnt fra ro

b) Kostnaden for x liter bensin

c) Arealet av en sirkel som funksjon av radien

d) Mengden av et radioaktivt stoff

9.22 Bremselengden er $L(v) = 0{,}005\,v^2$ meter, der v er farten i km/h.

a) Finn bremselengden ved 60 km/h.

b) Hvor mye lengre blir bremselengden når farten dobles?

9.23 En modell er laget fra data for $0 \leqslant x \leqslant 10$. Forklar forskjellen på å bruke den for $x = 5$ og for $x = 50$.

9.24 En lineær modell gjennom punktene $(2, 7)$ og $(6, 15)$ er gitt. Finn modellen.

9.25 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return 2*x + 3

data = [(1, 5.5), (2, 6.8), (3, 9.1)]
for x, y in data:
    print(round(y - f(x), 1))
```

9.26 Finn feilen. Lise har en lineær modell for høyden til et barn fra 0 til 5 år, og bruker den til å anslå høyden ved 40 år til 3,2 meter.

9.27 En regresjon gir modellen $f(x) = 0{,}5\,x^2 - 2x + 4$. Finn bunnpunktet.

9.28 Steinen i et forsøk faller $s = 4{,}9\,t^2$ meter. Hva er farten etter 3 sekunder?

9.29 Avvikene for en lineær modell er $-0{,}5$, 0,2, 0,6, 0,2, $-0{,}4$ og $-0{,}9$. Hva tyder mønsteret på?

9.30 Endre modellen i programmet til $f(x) = 2x + 3{,}5$, og finn de nye avvikene.

Python

```
def f(x):
    return 2*x + 3

data = [(1, 5.5), (2, 6.8), (3, 9.1)]
for x, y in data:
    print(round(y - f(x), 1))
```

9.3.1 Eksponentielle modeller og regresjon

EKSEMPEL *Doblingstid*

En bestand vokser med 5 % per år. Hva er doblingstiden?

Løsning

$$T = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx \frac{0{,}693}{0{,}0488} \approx 14{,}2 \text{ år}$$

■

9.31 Finn vekstfaktoren.

a) Vekst på 3 %

b) Nedgang på 10 %

c) Vekst på 100 %

d) Nedgang på 50 %

9.32 Antall bakterier er $N(t) = 300 \cdot 2^t$ etter t timer.

a) Hvor mange var det ved start?

b) Hva er doblingstiden?

c) Hvor mange er det etter 5 timer?

9.33 Et radioaktivt stoff har halveringstid 8 dager. Det er 160 g ved start.

a) Hvor mye er det etter 24 dager?

b) Lag en modell $m(t) = 160 \cdot b^t$. Finn b eksakt.

9.34 Finn doblingstiden eksakt.

a) $N(t) = 50 \cdot 1{,}2^t$

b) $N(t) = 10e^{0{,}05\,t}$

c) $N(t) = 3 \cdot 4^t$

9.35 Skriv på formen $a \cdot b^t$.

a) $5e^{t \ln 2}$

b) $8e^{-t \ln 2}$

c) e^{3t}

9.36 Skriv på formen $a \cdot e^{kt}$.

a) $4 \cdot 3^t$

b) $10 \cdot 0{,}5^t$

9.37 En bestand var 200 ved $t = 0$ og 242 ved $t = 2$. Finn en eksponentiell modell.

9.38 En regresjon av $\ln y$ mot x gir $\ln y = 0{,}3\,x + 2$. Finn y som funksjon av x.

9.39 Hvorfor kan vi tilpasse en rett linje til $\ln y$ når dataene er eksponentielle?

9.40 Penger i banken vokser med 3 % per år. Hvor mange år tar det før beløpet er doblet? Svar eksakt, og forklar hvorfor svaret ikke er $\frac{100}{3}$.

9.41 Hva blir utskriften?

Python

```
verdi = 500
aar = 0
while verdi < 1000:
    verdi = verdi * 2
    aar = aar + 3
print(aar, verdi)
```

Hva er doblingstiden?

9.42 Hva blir utskriften?

Python

```
N = 1000
for t in range(3):
    N = N * 0.9
    print(t + 1, round(N, 1))
```

9.43 Finn feilen. Per sier at en nedgang på 20 % per år gir modellen $N(t) = 100 \cdot (-0{,}2)^t$.

9.44 Vis at doblingstiden for $N(t) = ae^{kt}$ er $\frac{\ln 2}{k}$, uansett a.

9.45 En bestand vokser fra 100 til 102 400 på 10 år. Finn vekstfaktoren per år.

9.4.1 Logistiske modeller

EKSEMPEL *Kaninene på øya*

Bestanden av kaniner er $N(t) = \frac{1000}{1 + 49e^{-0{,}5\,t}}$ etter t år.

a) Hvor mange kaniner ble satt ut?

b) Hva er bæreevnen?

c) Når vokser bestanden raskest, og hvor fort vokser den da?

Løsning

a) $N(0) = \frac{1000}{50} = 20$ kaniner.

b) $K = 1000$.

c) Ved $t = \frac{\ln 49}{0{,}5} = 2 \ln 49 \approx 7{,}8$ år, når $N = 500$.
Vekstfarten er da $\frac{0{,}5 \cdot 1000}{4} = 125$ kaniner per år. ∎

9.46 En bestand er $N(t) = \frac{800}{1 + 15e^{-0{,}3\,t}}$.

a) Hva er bæreevnen?

b) Hva er bestanden ved $t = 0$?

c) Hva er bestanden i vendepunktet?

9.47 En bestand er $N(t) = \frac{1200}{1 + 3e^{-0{,}5\,t}}$.

a) Finn $N(0)$.

b) Finn t i vendepunktet eksakt.

c) Finn den største vekstfarten.

9.48 Hva skjer med $N(t) = \frac{K}{1 + ae^{-rt}}$ når $t \to \infty$? Begrunn svaret.

9.49 En logistisk modell har bæreevne 600, startverdi 60 og vendepunkt ved $t = 4$. Finn a og r.

9.50 Forklar forskjellen på eksponentiell og logistisk vekst med ord og en skisse.

9.51 Bruk $N'(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ med $r = 0{,}2$ og $K = 1000$. Finn vekstfarten når

a) $N = 100$

b) $N = 500$

c) $N = 900$

9.52 Når er bestanden $N(t) = \frac{500}{1 + 4e^{-t}}$ lik 400? Svar eksakt.

9.53 Hvilke av situasjonene passer for en logistisk modell?

a) Antall som har hørt et rykte på en skole

b) Saldoen på en sparekonto

c) Salget av en ny mobiltelefon

9.54 Hva blir utskriften?

Python

```
N = 200
K = 1000
r = 0.5
for aar in range(1, 3):
    N = N + r*N*(1 - N/K)
    print(aar, round(N))
```

9.55 Finn feilen. Nora sier at bestanden $N(t) = \dfrac{1000}{1 + 9e^{-t}}$ vokser raskest ved $t = 0$.

9.56 Vis at $N(0) = \dfrac{K}{1 + a}$ i en logistisk modell.

9.57 I en logistisk modell er $N(0) = 25$ og $K = 100$. Hvor stor andel av bæreevnen er bestanden ved start, og hva er a?

9.58 Vis at vekstfarten $rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$ er størst når $N = \dfrac{K}{2}$.

9.59 En epidemi følger $S(t) = \dfrac{2000}{1 + 199e^{-0{,}4\,t}}$. Hvor mange var smittet ved start?

9.60 For hvilken t er $N(t) = \dfrac{K}{1 + ae^{-rt}}$ lik $\dfrac{3K}{4}$?

9.5.1 Tolkning og vurdering med derivasjon

EKSEMPEL *Vekstfart i en kaffemodell*

Temperaturen i en kopp kaffe er $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}08\,t}$ grader etter t minutter. Finn $T'(10)$, og forklar hva tallet betyr.

Løsning

$T'(10) = -5{,}6\,e^{-0{,}8} \approx -2{,}5$. Etter 10 minutter synker temperaturen med omtrent 2,5 grader per minutt. ∎

EKSEMPEL *Vurder en modell*

En lineær modell for høyden til et grantre er $h(t) = 0{,}4\,t + 0{,}5$ meter, laget fra målinger de første 20 årene. Hva sier modellen om høyden etter 200 år? Er det rimelig?

Løsning

$h(200) = 80{,}5$ m. Det er urimelig: Grantrær blir sjelden høyere enn 40–50 m, og veksten avtar med alderen. Modellen gjelder bare de første tiårene. En logistisk modell ville passet bedre over lang tid. ∎

9.61 Antall solgte varer er $S(t) = 100 + 20t - t^2$ per uke, der t er antall uker.

a) Finn $S'(4)$ og forklar hva det betyr.

b) Når er salget størst?

9.62 Temperaturen er $T(t) = 20 + 60e^{-0{,}1\,t}$ grader etter t minutter.

a) Finn $T'(t)$.

b) Finn $T'(0)$ og forklar.

c) Hvilken temperatur nærmer T seg?

9.63 Konsentrasjonen av et stoff er $K(t) = 5te^{-0{,}25\,t}$.

a) Når er konsentrasjonen høyest?

b) Når synker den raskest?

9.64 Hva er enheten til $f'(t)$ når

a) $f(t)$ er antall liter og t er minutter,

b) $f(t)$ er kroner og t er år,

c) $f(t)$ er meter og t er sekunder?

9.65 En modell for antall elbiler (i tusen) er $E(t) = 10e^{0{,}4\,t}$, laget fra data for $0 \leqslant t \leqslant 10$. Vurder hva modellen sier om $t = 30$.

9.66 Modell A er $N(t) = 100 + 20t$, og modell B er $N(t) = 100 \cdot 1{,}2^t$.

a) Hva gir modellene for $t = 1$?

b) Hvilken vokser raskest på lang sikt?

9.67 Vis at $N(t) = 300e^{0{,}05\,t}$ oppfyller $N'(t) = 0{,}05\,N(t)$, og tolk resultatet.

9.68 Høyden til et tre er modellert ved $h(t) = \dfrac{30}{1 + 9e^{-0{,}1\,t}}$ meter, der t er år.

a) Hvor høyt blir treet?

b) Når vokser det raskest?

9.69 Hva blir utskriften?

Python

```
def A(t):
    return 100 + 20*t

def B(t):
    return 100 * 2**t

for t in [0, 1, 2, 3]:
    print(t, A(t), B(t))
```

9.70 Finn feilen. Mats sier at $T'(5) = -2$ i en temperaturmodell betyr at temperaturen er -2 grader etter 5 minutter.

9.71 En modell for høyden til et barn er laget fra 0 til 2 år. Hvorfor bør den ikke brukes for 15 år?

9.72 Antall solgte billetter er $B(p) = 2000 - 5p$ når prisen er p kroner. Inntekten er $I(p) = p \cdot B(p)$. Hvilken pris gir størst inntekt?

9.73 Hva betyr det at $f''(t) < 0$ for en modell der $f'(t) > 0$?

9.74 Volumet av vann i en tank er $V(t) = 500 - 4t^2$ liter.

a) Hvor fort renner vannet ut etter 5 minutter?

b) Når er tanken tom?

9.75 *Python* Endre programmet slik at det finner første hele t der modell B er minst ti ganger så stor som modell A.

```
def A(t):
    return 100 + 20*t

def B(t):
    return 100 * 2**t

for t in [0, 1, 2, 3]:
    print(t, A(t), B(t))
```

9.5.2 Selvstendig arbeid med reelle datasett

9.76 Skriv en konkret problemstilling for hvert tema.

a) Klima

b) Sport

c) Økonomi

9.77 Hvilken datakilde ville du brukt?

a) Folketall i norske kommuner

b) Temperatur og nedbør i Norge

c) Hvor fort en ball ruller ned en skråning

9.78 Sett stegene i riktig rekkefølge: modell, data, vurdering, problemstilling, analyse, utforske.

9.79 Hva bør en figur i en presentasjon ha med?

9.80 Du har målt temperaturen i en kopp te: 85, 70, 59, 51 grader hvert femte minutt i et rom med 21 grader. Hvilken modell vil du velge, og hvorfor?

9.81 For teen i forrige oppgave er $T - 21$ lik 64, 49, 38 og 30. Er forholdet mellom etterfølgende verdier omtrent konstant? Hva forteller det?

9.82 Modellen for teen er $T(t) = 21 + 64e^{-0{,}05\,t}$.

a) Finn $T'(0)$.

b) Når er temperaturen 53 grader? Svar eksakt.

9.83 Hvilke feilkilder kan det være i et forsøk der du måler avkjølingen av te?

9.84 Hva er forskjellen på en konklusjon og en vurdering i en rapport?

9.85 En elev har 4 datapunkter og tilpasser et polynom av grad 3 som går gjennom alle. Er det en god modell? Begrunn svaret.

9.86 Hva blir utskriften?

Python

```
diff = [64, 49, 38, 30]
for i in range(3):
    print(round(diff[i + 1] / diff[i], 2))
```

9.87 Foreslå et eget forsøk der du kan samle inn data hjemme, og hvilken modell du forventer.

9.88 Hvorfor er det viktig å oppgi kilden til dataene?

9.89 Data for antall elbiler i Norge vokser først raskt og så saktere. Hvilken modell vil du prøve, og hva er en rimelig bæreevne?

9.90 Lag en sjekkliste med fem punkter for å vurdere en modell.

Fasit

9.1.1 Datasett i Python

9.1
a) 15 hvert år
b) Lineær
c) $480 + 3 \cdot 15 = 525$

9.2
a) 1,1
b) 10 %
c) 292,82

9.3
a) -2 liter per minutt
b) -1 liter per minutt
c) $-$ 1,35 liter per minutt

9.4
a) Eksponentiell (faktor 2)
b) Lineær (økning 3)
c) Ingen av delene (økningen øker med 1 hver gang, som en andregradsfunksjon)
d) Eksponentiell (faktor $\frac{1}{2}$)

9.5
```
[3, 3, 3]
```

9.6
```
0.5
0.5
0.5
```

9.7
```
19 10 14.0
```

9.8
```
5
9
13
```

9.9
Verdiene er tekst, ikke tall. Gjør dem om med `float` eller `int` først.

9.10
Per tiår: $\frac{9680}{8000} = 1{,}21$. Per år: $b^{10} = 1{,}21$, så $b = 1{,}21^{1/10} \approx 1{,}019$.

9.11
a) Tida
b) Den variabelen vi vil bruke til å forklare den andre, for eksempel høyden

9.12
Bytt `y[i + 1] - y[i]` med `y[i + 1] / y[i]`. Utskriften blir `3.0` tre ganger.

9.13
```
1
3
5
```
Økningen øker med 2 hver gang, så en andregradsfunksjon passer: $y = x^2 + 1$.

9.14
Python gjør de samme beregningene for alle målingene raskt og uten regnefeil, og kan lage plott som viser mønsteret.

9.15
Firedobling på 20 år er to doblinger, så doblingstiden er 10 år.

9.2.1 Modellering med kjent funksjon

9.16
a) 240 kroner
b) 15 kroner per km, 60 kroner i startpris
c) $15x + 60 = 500$ gir $x \approx 29{,}3$ km

9.17
a) 5 cm
b) 1,2 cm
c) $t = 20$ uker

9.18
a) $h'(t) = -10t + 20 = 0$: $t = 2$
b) $h(2) = 22$ m
c) Starthøyden, 2 m

9.19
0,2, $-$ 0,3 og 0,3

9.20
Den med 3,1 passer best til dataene.
Men vi må også vurdere om modellen er rimelig i situasjonen, særlig hvis den skal brukes utenfor dataene.

9.21
a) Andregrad
b) Lineær
c) Andregrad
d) Eksponentiell

9.22
a) 18 m
b) Fire ganger så lang

9.23
$x = 5$ er innenfor dataene (interpolering), og modellen er trolig pålitelig. $x = 50$ er langt utenfor (ekstrapolering), og vi vet ikke om sammenhengen gjelder der.

9.24
Stigningstall $\frac{8}{4} = 2$: $f(x) = 2x + 3$

9.25
```
0.5
-0.2
0.1
```

9.26
Modellen brukes langt utenfor dataene. Mennesker slutter å vokse, så en lineær modell passer ikke for voksne.

9.27
$f'(x) = x - 2 = 0$ gir $x = 2$.
Bunnpunktet er $(2, 2)$.

9.28
$s'(t) = 9{,}8\ t$, så 29,4 m/s.

9.29
Avvikene er negative i begge ender og positive i midten. Dataene krummer, så en andregradsmodell passer trolig bedre.

9.30
Bytt `2*x + 3` med `2*x + 3.5`. Avvikene blir 0, $-$ 0,7 og $-$ 0,4.

9.3.1 Eksponentielle modeller og regresjon

9.31
a) 1,03
b) 0,9
c) 2
d) 0,5

9.32
a) 300
b) 1 time
c) 9600

9.33
a) Tre halveringer: 20 g
b) $b^8 = \frac{1}{2}$ gir $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/8} = 2^{-1/8}$

9.34
a) $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}2}$
b) $\frac{\ln 2}{0{,}05} = 20 \ln 2$
c) $\frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2}$

9.35
a) $5 \cdot 2^t$
b) $8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$
c) $\left(e^3\right)^t$

9.36
a) $4e^{t \ln 3}$
b) $10e^{-t \ln 2}$

9.37
$b^2 = 1{,}21$ gir $b = 1{,}1$: $N(t) = 200 \cdot 1{,}1^t$

9.38
$y = e^2 \cdot e^{0{,}3\,x} \approx 7{,}39\ e^{0{,}3\,x}$

9.39
$y = ae^{kx}$ gir $\ln y = \ln a + kx$, som er lineær i x.

9.40
$T = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}4$ år. Renta gir rentesrente, så det går raskere enn med fast tillegg per år.

9.41
`3 1000`. Doblingstiden er 3 år.

9.42
```
1 900.0
2 810.0
3 729.0
```

9.43
Vekstfaktoren er $1 - 0{,}2 = 0{,}8$: $N(t) = 100 \cdot 0{,}8^t$.

9.44
$ae^{kT} = 2a$ gir $e^{kT} = 2$ og $T = \frac{\ln 2}{k}$.

9.45
$b^{10} = 1024 = 2^{10}$, så $b = 2$.

9.4.1 Logistiske modeller

9.46
a) 800
b) 50
c) 400

9.47
a) 300
b) $2 \ln 3$
c) $\frac{0{,}5 \cdot 1200}{4} = 150$

9.48
$e^{-rt} \to 0$, så $N(t) \to K$.

9.49
$\frac{600}{1+a} = 60$ gir $a = 9$. $\frac{\ln 9}{r} = 4$ gir $r = \frac{\ln 9}{4} = \frac{\ln 3}{2}$.

9.50
Eksponentiell vekst fortsetter å øke stadig raskere. Logistisk vekst starter omtrent eksponentielt, men flater ut mot bæreevnen. Grafen har S-form.

9.51
a) 18
b) 50
c) 18

9.52
$1 + 4e^{-t} = \frac{5}{4}$ gir $e^{-t} = \frac{1}{16}$ og $t = \ln 16 = 4 \ln 2$.

9.53
a) Logistisk
b) Eksponentiell
c) Logistisk (markedet blir mettet)

9.54
```
1 280
2 381
```

9.55
Veksten er størst i vendepunktet, ved $t = \ln 9 \approx 2{,}2$, når $N = 500$.

9.56
$e^0 = 1$, så $N(0) = \frac{K}{1+a}$.

9.57
25 %, og $\frac{100}{1+a} = 25$ gir $a = 3$.

9.58
$g(N) = rN - \frac{r}{K}N^2$ har $g'(N) = r - \frac{2r}{K}N = 0$ når $N = \frac{K}{2}$.

9.59
$\frac{2000}{200} = 10$

9.60
$1 + ae^{-rt} = \frac{4}{3}$ gir $e^{-rt} = \frac{1}{3a}$, så $t = \frac{\ln(3a)}{r}$.

9.5.1 Tolkning og vurdering med derivasjon

9.61
a) $S'(t) = 20 - 2t$, så $S'(4) = 12$. Salget øker med 12 varer per uke per uke.
b) $t = 10$

9.62
a) $-6e^{-0{,}1\,t}$
b) -6 grader per minutt ved start
c) 20 °C

9.63
a) $K'(t) = e^{-0{,}25\,t}(5 - 1{,}25\,t) = 0$ gir $t = 4$.
b) $K''(t) = e^{-0{,}25\,t}(0{,}3125\,t - 2{,}5) = 0$ gir $t = 8$.

9.64
a) Liter per minutt
b) Kroner per år
c) Meter per sekund

9.65
$E(30) = 10e^{12}$, som er over en milliard tusen biler. Det er urimelig. Antall biler er begrenset, så veksten må flate ut.

9.66
a) Begge gir 120.
b) B, fordi eksponentiell vekst til slutt vokser fra all lineær vekst.

9.67
$N'(t) = 15e^{0{,}05\,t} = 0{,}05 \cdot 300e^{0{,}05\,t}$.
Vekstfarten er alltid 5 % av størrelsen.

9.68
a) 30 m
b) $t = \frac{\ln 9}{0{,}1} = 10 \ln 9 \approx 22$ år

9.69
```
0 100 100
1 120 200
2 140 400
3 160 800
```

9.70
$T'(5)$ er vekstfarten. Temperaturen synker med 2 grader per minutt etter 5 minutter.

9.71
Veksten endrer seg med alderen (blant annet vekstspurt i puberteten), så sammenhengen fra de første årene gjelder ikke.

9.72
$I(p) = 2000p - 5p^2$, $I'(p) = 2000 - 10p = 0$ gir $p = 200$ kroner.

9.73
Størrelsen vokser, men veksten avtar. Grafen stiger og vender den hule siden ned.

9.74
a) $V'(5) = -40$: 40 liter per minutt
b) $4t^2 = 500$ gir $t = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}2$ minutter

9.75
For eksempel
```
t = 0
while B(t) < 10*A(t):
    t = t + 1
print(t)
```
Utskriften er `5`: $B(5) = 3200 \geqslant 10A(5) = 2000$, mens $B(4) = 1600 < 10A(4) = 1800$.

9.5.2 Selvstendig arbeid med reelle datasett

9.76
Eksempler:
a) Hvor raskt har havisen i Arktis i september minket siden 1980?
b) Hvordan har verdensrekorden på 100 m utviklet seg siden 1960, og nærmer den seg en grense?
c) Hvordan har prisen på strøm endret seg de siste ti årene?

9.77
a) SSB
b) Meteorologisk institutt
c) Egne målinger

9.78
Problemstilling, data, utforske, modell, analyse, vurdering

9.79
Tittel, navn og enheter på aksene, tydelige punkter eller kurver, og forklaring (legend) hvis det er flere kurver.

9.80
$T(t) = 21 + ae^{kt}$ med $k < 0$.
Forskjellen mellom teen og rommet avtar eksponentielt (Newtons avkjølingslov), og teen nærmer seg romtemperaturen.

9.81
$\frac{49}{64} \approx 0{,}77$, $\frac{38}{49} \approx 0{,}78$ og $\frac{30}{38} \approx 0{,}79$.
Omtrent konstant, så $T - 21$ avtar eksponentielt.

9.82
a) $-3{,}2$ grader per minutt
b) $64e^{-0{,}05\,t} = 32$ gir $t = 20\ln 2 \approx 13{,}9$ minutter

9.83
For eksempel unøyaktig termometer, at romtemperaturen endrer seg, trekk, at koppen står på en kald flate, og at målingene ikke tas nøyaktig til riktig tid.

9.84
Konklusjonen svarer på problemstillingen. Vurderingen diskuterer hvor gode dataene og modellen er, og hvor langt resultatene kan brukes.

9.85
Ikke nødvendigvis. Et polynom av grad 3 går alltid gjennom 4 punkter, også når det ikke finnes noen slik sammenheng. Modellen bør begrunnes ut fra situasjonen, og den kan oppføre seg rart mellom og utenfor punktene.

9.86
```
0.77
0.78
0.79
```

9.87
For eksempel: vann som renner ut av en flaske med hull (tid og vannhøyde, andregrad), en ball som spretter (høyde etter hvert sprett, eksponentiell), eller te som avkjøles (eksponentiell mot romtemperatur).

9.88
Slik at andre kan kontrollere dataene og vurdere hvor pålitelige de er.

9.89
En logistisk modell. Bæreevnen bør være omtrent antall personbiler i Norge, rundt 3 millioner.

9.90
For eksempel: Passer modellen til dataene? Har avvikene et mønster? Er funksjonstypen rimelig i situasjonen? Hva er gyldighetsområdet? Gir modellen rimelige svar for verdier vi vet noe om?