Parametrisering

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

LINJER

Parameterframstilling

$$\ell : \{x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt$$

Stigningstall

$$k = \frac{b}{a}$$

Fra $y = kx + m$

$$x = t, \quad y = kt + m$$

BEVEGELSE

Posisjon

$$(x_0 + at, y_0 + bt)$$

Fart

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Fartsvektor

$$\vec{v}(t) = [f'(t), g'(t)]$$

- Kollisjon krever samme punkt ved samme tid.

8.1.1 Parameterframstilling av linjer

EKSEMPEL *Linja gjennom to punkter*

Finn en parameterframstilling for linja gjennom $A = (1, 2)$ og $B = (4, 3)$, og finn punktet på linja der $t = -1$.

Løsning

$\overrightarrow{AB} = [3, 1]$, så

$$\ell : \{x = 1 + 3t$$
$$y = 2 + t$$

For $t = -1$ får vi $(-2, 1)$. ∎

EKSEMPEL *Punkt på linja*

Ligger $(7, 4)$ og $(7, 5)$ på linja $x = 1 + 3t$, $y = 2 + t$?

Løsning

$1 + 3t = 7$ gir $t = 2$, og da er $y = 2 + 2 = 4$. Punktet $(7, 4)$ ligger på linja, men $(7, 5)$ gjør det ikke. ∎

EKSEMPEL *Er linjene parallelle?*

$\ell : x = 1 + 2t$, $y = 3 - t$ og $m : x = 4 - 6s$, $y = 3s$. Er linjene parallelle?

Løsning

$[-6, 3] = -3[2, -1]$. Retningsvektorene er parallelle, så linjene er parallelle (eller de er den samme linja). Punktet $(4, 0)$ på m gir $t = \frac{3}{2}$ fra x, men $y = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$. Linjene er altså forskjellige. ∎

8.1 Linja ℓ er gitt ved $x = 3 + 2t$, $y = -1 + t$. Finn punktet der

a) $t = 0$

b) $t = 2$

c) $t = -3$

8.2 Skriv opp startpunktet og retningsvektoren.

a) $x = 1 + 4t$, $y = 2 - t$

b) $x = -t$, $y = 5 + 3t$

c) $x = 2$, $y = 1 + t$

8.3 Finn en parameterframstilling for linja gjennom punktene.

a) $(0, 0)$ og $(2, 5)$

b) $(1, 3)$ og $(4, -3)$

c) $(-2, 1)$ og $(-2, 6)$

8.4 Finn en parameterframstilling for linja gjennom $(2, -1)$ som er parallell med $[3, 4]$.

8.5 Ligger punktet på linja $x = 1 + 2t$, $y = 3 - t$?

a) $(5, 1)$

b) $(7, 1)$

c) $(-3, 5)$

8.6 Punktet $(k, -2)$ ligger på linja $x = 4 - t$, $y = 1 + 3t$. Finn k.

8.7 Er linjene parallelle?

a) $x = 1 + 2t$, $y = t$ og $x = 3 - 4s$, $y = 1 - 2s$

b) $x = t$, $y = 2 + 3t$ og $x = 1 + 3s$, $y = s$

8.8 Finn k slik at linjene $x = 2 + kt$, $y = 1 + 6t$ og $x = 5s$, $y = 3 + 2s$ er parallelle.

8.9 Vis at $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$ og $x = 3 - 2s$, $y = 6 - 4s$ er den samme linja.

8.10 Finn skjæringspunktet mellom $\ell : x = t$, $y = 2t$ og $m : x = 6 - s$, $y = s$.

8.11 Finn feilen. Ola sjekker om $(5, 4)$ ligger på $x = 1 + 2t$, $y = t$. Han finner $t = 2$ fra x og $t = 4$ fra y, og konkluderer med at punktet ligger på linja.

8.12 Hva blir utskriften?

Python

```
for t in [0, 1, 2]:
    print(2 - t, 1 + 3*t)
```

Skriv opp parameterframstillingen.

8.13 Linja ℓ går gjennom $A = (2, 1)$ og $B = (6, 3)$. Finn punktet på linja som deler AB i forholdet $1 : 3$ fra A.

8.14 Finn parameterverdien til punktet $(102, 51)$ på linja $x = 2 + 2t$, $y = 1 + t$.

8.15 Linjene $x = 1 + t$, $y = 2 + at$ og $x = 3 + s$, $y = 2s$ skjærer hverandre i punktet $(3, 0)$. Finn a.

8.2.1 Skjæring med aksene og linja på likningsform

EKSEMPEL *Skjæring med aksene*

Finn skjæringspunktene mellom $\ell : x = 1 + 2t$, $y = 6 - 3t$ og aksene.

Løsning

$y = 0$ gir $t = 2$ og $x = 5$. Skjæring med x-aksen: $(5, 0)$.

$x = 0$ gir $t = -\frac{1}{2}$ og $y = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$. Skjæring med y-aksen: $\left(0, \frac{15}{2}\right)$. ∎

EKSEMPEL *Skriv om til likningsform*

Skriv $\ell : x = 1 + 2t$, $y = 6 - 3t$ på formen $y = kx + m$.

Løsning

$t = \dfrac{x-1}{2}$, så

$$y = 6 - 3 \cdot \frac{x-1}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$$

Stigningstallet $-\dfrac{3}{2}$ stemmer med retningsvektoren $[2, -3]$.

■

EKSEMPEL *Skjæringspunkt mellom en parameterlinje og en likning*

Finn skjæringspunktet mellom $\ell : x = 1 + 2t$, $y = 6 - 3t$ og linja $y = x + 1$.

Løsning

$6 - 3t = (1 + 2t) + 1$ gir $5t = 4$, så $t = \dfrac{4}{5}$.

Skjæringspunktet er $\left(\dfrac{13}{5}, \dfrac{18}{5}\right)$.

■

8.16 Finn skjæringspunktene med aksene.

a) $x = 2 + t$, $y = 4 - 2t$

b) $x = -3 + 3t$, $y = 1 + t$

8.17 Skriv på formen $y = kx + m$.

a) $x = t$, $y = 5t + 2$

b) $x = 2 + t$, $y = 3 + 2t$

c) $x = 1 + 4t$, $y = 2 - 2t$

8.18 Finn stigningstallet til linja med retningsvektor

a) $[2, 6]$

b) $[-3, 1]$

c) $[4, 0]$

8.19 Finn en parameterframstilling for linja.

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -x + 4$

c) $x = 5$

8.20 Finn skjæringspunktet mellom $x = 1 + t$, $y = 2 - t$ og linja $y = 2x$.

8.21 Finn skjæringspunktet mellom $x = 2t$, $y = 1 + t$ og $x = 4 + s$, $y = 4 - s$.

8.22 Linja $x = 6 - 2t$, $y = 3t$ danner en trekant med aksene. Finn arealet.

8.23 Finn en parameterframstilling for linja gjennom $(1, 2)$ som står vinkelrett på linja $x = 3 + 2t$, $y = t$.

8.24 Linja ℓ har likningen $2x + 3y = 6$. Finn en parameterframstilling.

8.25 Finn feilen. Lise skriver at linja $x = 1 + 2t$, $y = 3 + 8t$ har stigningstallet $\dfrac{1}{4}$.

8.26 Hva blir utskriften?

Python

```
a, b = 3, -6
x0, y0 = 1, 2
k = b / a
m = y0 - k*x0
print(k, m)
```

8.27 Linjene $\ell : x = 1 + t$, $y = 2t$ og $m : y = kx + 1$ er parallelle. Finn k.

8.28 Finn skjæringspunktet mellom y-aksen og linja gjennom $(100, 50)$ og $(102, 52)$.

8.29 Vis at linja $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ med $a \neq 0$ har likningen $y = \dfrac{b}{a}(x - x_0) + y_0$.

8.30 Finn skjæringspunktet mellom linjene $y = 2x - 3$ og $x = 1 + t$, $y = 4 - t$.

8.3.1 Bevegelse langs en linje

EKSEMPEL *Båten*

En båt starter i $(0, 0)$ og har fartsvektoren $[4, 3]$ km/h. Hvor fort går båten, og når er den i punktet $(12, 9)$?

Løsning

Farten er $\sqrt{16 + 9} = 5$ km/h. $4t = 12$ og $3t = 9$ gir begge $t = 3$, så båten er i $(12, 9)$ etter 3 timer.

■

EKSEMPEL *Kolliderer båtene?*

Båt A er i $(4t, 3t)$, og båt B er i $(10 - t, 3t)$ ved tida t. Kolliderer de?

Løsning

$4t = 10 - t$ gir $t = 2$, og $3t = 3t$ stemmer for alle t. Båtene er begge i $(8, 6)$ når $t = 2$, så de kolliderer.

■

EKSEMPEL *Nærmest hverandre*

Syklist A er i $(t, 0)$ og syklist B i $(0, 4 - t)$, målt i km og timer. Når er de nærmest hverandre, og hvor langt er det da mellom dem?

Løsning

$d^2 = 2t^2 - 8t + 16$. Den deriverte $4t - 8 = 0$ gir $t = 2$. Da er $d^2 = 8$, så avstanden er $2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ km.

■

8.31 Et objekt er i $(1 + 3t, 2 + 4t)$ etter t sekunder, målt i meter.

a) Hvor er det etter 3 sekunder?

b) Hva er farten?

8.32 Finn farten når fartsvektoren er

a) $[6, 8]$ km/h

b) $[-5, 12]$ m/s

c) $[1, 1]$ m/s

8.33 En båt starter i $(2, 3)$ og har fartsvektoren $[3, -1]$ km/h. Når er båten i $(14, -1)$?

8.34 En bil kjører fra $(0, 0)$ mot $(30, 40)$ med farten 25 km/h. Finn fartsvektoren og når den kommer fram.

8.35 Kolliderer båtene? Båt A er i $(t, 2t)$ og båt B i $(6 - 2t, 3 + t)$.

8.36 Kolliderer båtene? Båt A er i $(1 + t, 3t)$ og båt B i $(7 - t, 12 - t)$.

8.37 To personer går fra $(0, 0)$ og $(10, 0)$ med fartsvektorene $[1, 1]$ og $[-1, 1]$. Når og hvor møtes de?

8.38 Båt A er i $(2t, 0)$ og båt B i $(0, 10 - t)$. Når er de nærmest hverandre?

8.39 En båt er i $(t, 2t)$. Når er den nærmest fyret i $(5, 0)$, og hvor langt unna er den da?

8.40 Finn feilen. Per sier at to fly kolliderer fordi banene deres krysser hverandre.

8.41 Hva blir utskriften?

Python

```
for t in range(4):
    A = (1 + t, 3*t)
    B = (7 - t, 12 - t)
    print(t, A == B)
```

8.42 En svømmer krysser en elv som er 100 m bred. Svømmeren har fartsvektoren $[0, 1]$ m/s i forhold til vannet, og strømmen er $[0{,}5; 0]$ m/s. Hvor langt nedover elva kommer svømmeren i land?

8.43 En lysstråle går fra $(0, 6)$ i retningen $[1, -2]$ og reflekteres i x-aksen. Hvor treffer den linja $x = 7$?

8.44 Vis at avstanden mellom to objekter som beveger seg med konstante fartsvektorer, har kvadrat som er en andregradsfunksjon av t.

8.45 Et skip går med fartsvektoren $[30, 40]$ km/h i 100 timer. Hvor langt har det gått?

8.4.1 Parameterframstilling av kurver (fordypning)

EKSEMPEL *En parabel*

Kurven K er gitt ved $x = t$, $y = t^2$. Finn punktet for $t = 2$, fartsvektoren der, og en likning for kurven uten t.

Løsning

For $t = 2$ er punktet $(2, 4)$. $\vec{v}(t) = [1, 2t]$, så $\vec{v}(2) = [1, 4]$. Siden $x = t$, er $y = x^2$. Fartsvektoren $[1, 4]$ har stigningstall 4, som er $(x^2)'$ i $x = 2$. ∎

EKSEMPEL *Ballen som kastes skrått*

En ball kastes fra bakken og har posisjonen $x = 10t$, $y = 15t - 5t^2$ (meter, sekunder). Finn det høyeste punktet og nedslagspunktet.

Løsning

$y'(t) = 15 - 10t = 0$ gir $t = 1{,}5$. Da er $x = 15$ og $y = 22{,}5 - 11{,}25 = 11{,}25$. Høyeste punkt: $(15; 11{,}25)$.

$y = 5t(3 - t) = 0$ gir $t = 3$. Ballen lander i $(30, 0)$. ∎

8.46 Kurven K er gitt ved $x = t + 1$, $y = t^2$. Finn punktene for $t = -1$, 0 og 2.

8.47 Finn en likning for kurven uten t.

a) $x = t$, $y = t^3$

b) $x = t - 2$, $y = t^2 + 1$

c) $x = 3t$, $y = 9t^2$

8.48 Finn fartsvektoren og farten for $t = 2$.

a) $x = t^2$, $y = 3t$

b) $x = 2t$, $y = t^2 - 1$

8.49 En ball har posisjonen $x = 12t$, $y = 16t - 5t^2$.

a) Når er ballen høyest, og hvor høyt er den da?

b) Hvor langt kastes ballen?

8.50 En stein slippes fra 45 m høyde med en fart bortover: $x = 4t$, $y = 45 - 5t^2$. Når og hvor treffer den bakken?

8.51 Finn tangenten til kurven $x = t^2$, $y = t^3$ i punktet der $t = 2$.

8.52 For hvilken t er tangenten til $x = t^2 - 4t$, $y = t$ loddrett?

8.53 En partikkel har posisjonen $x = t^2$, $y = 4t$. Når er farten 5?

8.54 Finn feilen. Nora sier at ballen med $x = 10t$, $y = 20t - 5t^2$ er høyest når $x'(t) = 0$.

8.55 Hva blir utskriften?

Python

```
for t in [0, 1, 2, 3]:
    print(t, 4*t, 12*t - 4*t**2)
```

Når er y størst av disse?

8.56 Vis at kastelengden for $x = at$, $y = bt - 5t^2$ er $\frac{ab}{5}$.

8.57 Kurven $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$ går gjennom origo for to verdier av t. Finn dem.

8.58 Finn farten til ballen $x = 10t$, $y = 20t - 5t^2$ i det høyeste punktet.

8.59 En ball kastes med $x = 15t$, $y = 20t - 5t^2$. Finn farten når den lander.

8.60 Vis at kurven $x = t$, $y = t^2$ og linja $x = 1 + s$, $y = 1 + 2s$ berører hverandre i $(1, 1)$.

Fasit

8.1.1 Parameterframstilling av linjer

8.1
a) $(3, -1)$
b) $(7, 1)$
c) $(-3, -4)$

8.2
a) $(1, 2)$ og $[4, -1]$
b) $(0, 5)$ og $[-1, 3]$
c) $(2, 1)$ og $[0, 1]$ (loddrett linje)

8.3
Mange svar er mulige, for eksempel
a) $x = 2t$, $y = 5t$
b) $x = 1 + 3t$, $y = 3 - 6t$
c) $x = -2$, $y = 1 + 5t$

8.4
$x = 2 + 3t$, $y = -1 + 4t$

8.5
a) $t = 2$: ja
b) $t = 3$ gir $y = 0$: nei
c) $t = -2$: ja

8.6
$1 + 3t = -2$ gir $t = -1$, så $k = 5$.

8.7
a) $[-4, -2] = -2[2, 1]$: ja
b) $[1, 3]$ og $[3, 1]$: nei

8.8
$[k, 6] = 3[5, 2]$ gir $k = 15$.

8.9
$[-2, -4] = -2[1, 2]$, og $(3, 6)$ ligger på den første linja med $t = 2$.

8.10
$t = 6 - s$ og $2t = s$ gir $t = 2$. Punktet er $(2, 4)$.

8.11
t må være den samme. Siden $2 \neq 4$, ligger punktet ikke på linja.

8.12

```
2 1
1 4
0 7
```

$x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$

8.13
$t = \frac{1}{4}$: $(2 + 1, 1 + \frac{1}{2}) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$

8.14
$t = 50$

8.15
$(3, 0)$ ligger på den andre linja med $s = 0$. På den første gir $x = 3$ at $t = 2$, så $2 + 2a = 0$ og $a = -1$.

8.2.1 Skjæring med aksene og linja på likningsform

8.16
a) x-aksen $(4, 0)$, y-aksen $(0, 8)$
b) x-aksen $(-6, 0)$, y-aksen $(0, 2)$

8.17
a) $y = 5x + 2$
b) $y = 2x - 1$
c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

8.18
a) 3
b) $-\frac{1}{3}$
c) 0

8.19
a) $x = t$, $y = 3t - 1$
b) $x = t$, $y = -t + 4$
c) $x = 5$, $y = t$

8.20
$2 - t = 2 + 2t$ gir $t = 0$. Punktet er $(1, 2)$.

8.21
$2t = 4 + s$ og $1 + t = 4 - s$ gir $3t = 7$, $t = \frac{7}{3}$. Punktet er $\left(\frac{14}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

8.22
$(6, 0)$ og $(0, 9)$: arealet er 27.

8.23
Retningsvektor vinkelrett på $[2, 1]$, for eksempel $[1, -2]$: $x = 1 + t$, $y = 2 - 2t$.

8.24
$x = 0$ gir $(0, 2)$, og stigningstallet er $-\frac{2}{3}$, så retningsvektoren kan være $[3, -2]$: $x = 3t$, $y = 2 - 2t$.

8.25
Stigningstallet er $\frac{8}{2} = 4$.

8.26
`-2.0 4.0`. Linja er $y = -2x + 4$.

8.27
$k = 2$

8.28
Retningsvektor $[2, 2]$, stigningstall 1: $y = x - 50$. Skjæring $(0, -50)$.

8.29
$t = \frac{x - x_0}{a}$ gir $y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$.

8.30
$4 - t = 2(1 + t) - 3$ gir $t = \frac{5}{3}$. Punktet er $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

8.3.1 Bevegelse langs en linje

8.31
a) $(10, 14)$
b) 5 m/s

8.32
a) 10 km/h
b) 13 m/s
c) $\sqrt{2}$ m/s

8.33
$t = 4$ timer

8.34
Retningen er $[30, 40]$ med lengde 50.
Fartsvektoren er $\frac{25}{50}[30, 40] = [15, 20]$.
Den kommer fram etter 2 timer.

8.35
$t = 6 - 2t$ gir $t = 2$, og $2t = 3 + t$ gir $t = 3$. Ulike tider, så de kolliderer ikke.

8.36
$1 + t = 7 - t$ gir $t = 3$, og $3t = 12 - t$ gir $t = 3$. Ja, i $(4, 9)$ etter 3 timer.

8.37
$t = 10 - t$ gir $t = 5$, og $y = 5$ for begge. De møtes i $(5, 5)$ etter 5 tidsenheter.

8.38
$d^2 = 4t^2 + (10 - t)^2 = 5t^2 - 20t + 100$, minimum når $t = 2$. Avstanden er $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

8.39
$d^2 = (t - 5)^2 + 4t^2 = 5t^2 - 10t + 25$, minimum når $t = 1$. Avstanden er $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

8.40
Flyene må også være i krysningspunktet ved samme tid.

8.41

```
0 False
1 False
2 False
3 True
```

8.42
Det tar 100 s å krysse. Strømmen fører svømmeren 50 m nedover.

8.43
Den treffer x-aksen i $(3, 0)$ og fortsetter i retningen $[1, 2]$: $(7, 8)$.

8.44
Differansen mellom posisjonene er $[p + qt, r + st]$, og kvadratet av lengden er $(p + qt)^2 + (r + st)^2$, som er et andregradspolynom i t.

8.45
$50 \cdot 100 = 5000$ km

8.4.1 Parameterframstilling av kurver (fordypning)

8.46
$(0, 1)$, $(1, 0)$ og $(3, 4)$

8.47
a) $y = x^3$

b) $y = (x + 2)^2 + 1$

c) $y = x^2$

8.48
a) $[4, 3]$, farten 5

b) $[2, 4]$, farten $2\sqrt{5}$

8.49
a) $t = 1{,}6$ s og $y = 12{,}8$ m

b) $y = 0$ gir $t = 3{,}2$, så $x = 38{,}4$ m

8.50
$5t^2 = 45$ gir $t = 3$. Den treffer i $x = 12$.

8.51
Punktet er $(4, 8)$ og $\vec{v} = [4, 12]$, stigningstall 3: $y = 3x - 4$.

8.52
$x'(t) = 2t - 4 = 0$ gir $t = 2$.

8.53
$|\vec{v}| = \sqrt{4t^2 + 16} = 5$ gir $t^2 = \frac{9}{4}$, så $t = \frac{3}{2}$ (for $t \geqslant 0$).

8.54
Det er $y'(t) = 0$ som gir det høyeste punktet: $t = 2$. $x'(t) = 10$ er aldri 0.

8.55

```
0 0 0
1 4 8
2 8 8
3 12 0
```

Mellom $t = 1$ og $t = 2$; derivasjon gir $t = 1{,}5$.

8.56
$y = 0$ gir $t = \frac{b}{5}$, og $x = \frac{ab}{5}$.

8.57
$t^2 = 1$ og $t(t^2 - 1) = 0$: $t = 1$ og $t = -1$.

8.58
$t = 2$: $\vec{v} = [10, 0]$, farten er 10 m/s.

8.59
$t = 4$: $\vec{v} = [15, -20]$, farten er 25 m/s, like stor som ved starten.

8.60
$(1, 1)$ ligger på begge ($t = 1$, $s = 0$). Fartsvektoren til kurven i $t = 1$ er $[1, 2]$, som er retningsvektoren til linja. Linja er tangenten.