7

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK R1

Vektorer

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

REGNING MED VEKTORER

Motsatt vektor

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Sum

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Differanse

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Mellom to punkter

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Lengde

$$|[x, y]| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

PARALLELLE VEKTORER OG SKALARPRODUKT

Parallelle vektorer

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = t\vec{b}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$$

Koordinatform

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1x_2 + y_1y_2$$

Vinkelrett

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Vinkel

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

GEOMETRI

Midtpunkt

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Sirkel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Tangent til sirkel

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

7.1.1 Vektorbegrepet

EKSEMPEL *Like vektorer i et parallellogram*

ABCD er et parallellogram. Hvilke vektorer er like $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$? Hva er $-\overrightarrow{CD}$?

Løsning

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, fordi motstående sider er like lange og peker samme vei.

$-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

■

EKSEMPEL *Lengden til en vektor i rutenettet*

En vektor går 6 ruter til høyre og 8 ruter ned. Hvor lang er den?

Løsning

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

Retningen (ned) påvirker ikke lengden.

■

7.1 Avgjør om størrelsen er en skalar eller en vektor.

a) Farten til en bil, 60 km/h

b) En båt seiler 60 km/h mot sørvest

c) Tyngdekraften på en stein

d) Volumet av en flaske

7.2 En vektor går a ruter til høyre og b ruter opp. Finn lengden.

a) $a = 6$, $b = 8$

b) $a = -5$, $b = 12$

c) $a = 2$, $b = 2$

d) $a = 1$, $b = -3$

7.3 ABCD er et kvadrat. Finn en vektor som er lik

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{CB}$

c) $-\overrightarrow{DC}$

d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

7.4 Avgjør om påstanden er sann eller usann.

a) Like vektorer har samme lengde.

b) Vektorer med samme lengde er like.

c) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

7.5 Hvor mange ruter til høyre og opp går en vektor med lengde 5 der begge tallene er positive heltall?

7.6 En drone flyr 300 m østover og så 400 m nordover. Hvor langt fra start er den?

7.7 ABCDEF er en regulær sekskant med sentrum S. Finn alle vektorer mellom hjørnene og S som er lik $\overrightarrow{SA}$.

7.8 En båt holder kursen rett mot nord med fart 4 m/s, mens strømmen går mot øst med 3 m/s. Hvor fort beveger båten seg i forhold til land?

7.9 Finn feilen. Ola sier at vektoren som går 3 til venstre og 4 ned, har lengden -5.

7.10 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import sqrt

for dx, dy in [(3, 4), (-8, 6), (0, 2)]:
    print(sqrt(dx**2 + dy**2))
```

7.11 En vektor går 5 ruter til høyre og b ruter opp, og har lengden 13. Finn de mulige verdiene for b.

7.12 En vektor med lengde 100 går like langt til høyre som opp. Hvor langt går den til høyre?

7.13 Tegn tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ der $\vec{a} = \vec{b}$, men $\vec{a}$ og $\vec{c}$ har samme lengde og er ulike.

7.14 Forklar hvorfor $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

7.15 En vektor går a ruter til høyre og b ruter opp. Vis at $-\vec{v}$ går $-a$ til høyre og $-b$ opp, og har samme lengde.

7.2.1 Sum, differanse og skalering

EKSEMPEL *Forenkle vektoruttrykk*

Forenkle.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

c) $2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right)$

Løsning

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

c) $2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{a} + 3\vec{b} = \vec{a} + 5\vec{b}$

■

EKSEMPEL *Vektorer i en trekant*

I trekanten ABC er $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. M er midtpunktet på BC. Uttrykk $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AM}$ med $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Løsning

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

■

7.16 Skriv som én vektor.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

7.17 Forenkle.

a) $2\vec{a} + 3\vec{a}$

b) $3\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + 2\vec{b}$

c) $\vec{a} - 2\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$

d) $\frac{1}{2}\left(4\vec{a} + 6\vec{b}\right) - \vec{b}$

7.18 $|\vec{a}| = 4$. Finn

a) $|3\vec{a}|$

b) $|-2\vec{a}|$

c) $\left|\frac{1}{4}\vec{a}\right|$

7.19 $\vec{a}$ går 5 til høyre og $\vec{b}$ går 12 opp. Finn

a) $|\vec{a} + \vec{b}|$

b) $|\vec{a} - \vec{b}|$

c) $|2\vec{a} + \vec{b}|$

7.20 I trekanten ABC er $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Uttrykk med $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

a) $\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{AM}$, der M er midtpunktet på BC

7.21 ABCD er et parallellogram med $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Uttrykk med $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

a) $\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{CA}$

7.22 ABCD er et parallellogram med $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. P er midtpunktet på BC, og Q er midtpunktet på CD. Uttrykk $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ og $\overrightarrow{PQ}$ med $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

7.23 Løs likningen for $\vec{x}$: $2\vec{x} + \vec{a} = 3\vec{b}$.

7.24 Finn feilen. Lise skriver $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

7.25 Hva blir utskriften?

Python

```
steg = [(4, 1), (-1, 3), (2, -4)]
x, y = 0, 0
for dx, dy in steg:
    x = x + dx
    y = y + dy
print(x, y)
```

7.26 En båt kjører 10 km/h mot nord, mens strømmen er 10 km/h mot øst. Tegn vektorene, og finn farten i forhold til land.

7.27 M er midtpunktet på AB, og O er et vilkårlig punkt. Vis at $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

7.28 T er tyngdepunktet i trekanten ABC. Det er kjent at $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. Vis at $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.

7.29 Forklar med en figur hvorfor $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

7.30 Finn $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ når $\vec{a}$ går 100 til høyre, $\vec{b}$ går 100 opp og $\vec{c}$ går 100 til venstre.

7.3.1 Vektorer på koordinatform

EKSEMPEL *Regn med koordinater*

La $\vec{a} = [2, -1]$ og $\vec{b} = [3, 4]$. Finn $\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a} - \vec{b}$ og $|\vec{b}|$.

Løsning

$\vec{a} + \vec{b} = [5, 3]$

$3\vec{a} - \vec{b} = [6, -3] - [3, 4] = [3, -7]$

$|\vec{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

■

EKSEMPEL *Vektor og avstand mellom punkter*

$A = (1, 2)$ og $B = (4, -2)$. Finn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ og avstanden fra A til B.

Løsning

$\overrightarrow{AB} = [4 - 1, -2 - 2] = [3, -4]$ og $\overrightarrow{BA} = [-3, 4]$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

■

7.31 La $\vec{a} = [2, -1]$ og $\vec{b} = [-3, 4]$. Finn

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{b} - \vec{a}$

c) $3\vec{a}$

d) $2\vec{a} + \vec{b}$

7.32 Finn $\overrightarrow{AB}$ og $|\overrightarrow{AB}|$.

a) $A = (1, 2)$, $B = (4, 6)$

b) $A = (-2, 3)$, $B = (3, -9)$

c) $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$

7.33 Finn lengden.

a) $[8, 6]$

b) $[-7, 24]$

c) $[2, -4]$

d) $[100, 0]$

7.34 $A = (2, 1)$ og $\overrightarrow{AB} = [-3, 5]$. Finn B.

7.35 $B = (5, 0)$ og $\overrightarrow{AB} = [2, -4]$. Finn A.

7.36 $A = (0, 1)$, $B = (4, 2)$ og $C = (5, 6)$. Finn D slik at ABCD blir et parallellogram.

7.37 Løs for $\vec{x}$: $[3, 2] + \vec{x} = [1, 7]$.

7.38 Finn s og t slik at $s[1,2] = [t,10]$.

7.39 Finn enhetsvektoren med samme retning som

a) $[0,5]$

b) $[6,8]$

c) $[1,1]$

7.40 Finn t slik at $|[t,3]| = 5$.

7.41 Trekanten har hjørnene $A = (1,1)$, $B = (7,1)$ og $C = (4,5)$. Finn omkretsen.

7.42 Finn feilen. Per skriver at vektoren fra $A = (5,2)$ til $B = (1,4)$ er $[4,-2]$.

7.43 Hva blir utskriften?

Python

```
A = [2, 5]
B = [-1, 1]
AB = [B[0] - A[0], B[1] - A[1]]
print(AB, AB[0]**2 + AB[1]**2)
```

7.44 Vis at punktene $(0,0)$, $(3,4)$ og $(7,1)$ er hjørner i en likebeint trekant.

7.45 $\vec{a} = [100,50]$ og $\vec{b} = [-99,-49]$. Finn $|\vec{a} + \vec{b}|$ uten å regne ut lengden til hver vektor.

7.3.2 Dekomponering

EKSEMPEL *Dekomponer en vektor*

La $\vec{a} = [1,2]$, $\vec{b} = [3,-1]$ og $\vec{c} = [5,3]$. Finn s og t slik at $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$.

Løsning

$$s + 3t = 5$$
$$2s - t = 3$$

Fra den andre likningen er $t = 2s - 3$. Innsatt i den første: $s + 6s - 9 = 5$, så $s = 2$ og $t = 1$.

Kontroll: $2[1,2] + [3,-1] = [5,3]$. ∎

EKSEMPEL *Dekomponering i en figur*

ABCD er et parallellogram med $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Punktet P ligger på BC slik at $BP = \frac{1}{3}BC$. Skriv $\overrightarrow{AP}$ som $s\vec{u} + t\vec{v}$.

Løsning

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$. Altså $s = 1$ og $t = \frac{1}{3}$. ∎

7.46 Skriv vektoren på formen $x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

a) $[3,-5]$

b) $[0,2]$

c) $2[1,3] - [4,1]$

7.47 Finn s og t slik at $s[1,0] + t[0,1] = [-4,7]$.

7.48 Finn s og t slik at $s[1,1] + t[1,-1] = [6,2]$.

7.49 Finn s og t slik at $s[2,1] + t[1,3] = [7,6]$.

7.50 Finn s og t slik at $s[3,-1] + t[1,2] = [1,5]$.

7.51 I trekanten ABC er $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Punktet D ligger på BC med $BD = \frac{1}{3}BC$. Skriv $\overrightarrow{AD}$ som $s\vec{u} + t\vec{v}$.

7.52 ABCD er et parallellogram med $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. E ligger på CD med $DE = \frac{1}{4}DC$. Skriv $\overrightarrow{BE}$ som $s\vec{u} + t\vec{v}$.

7.53 Forklar hvorfor $[1,3]$ ikke kan skrives som $s[1,2] + t[3,6]$.

7.54 Hva blir utskriften?

Python

```
a = [1, 1]
b = [1, -1]
c = [6, 2]
s = (c[0] + c[1]) / 2
t = (c[0] - c[1]) / 2
print(s, t)
print(s*a[0] + t*b[0], s*a[1] + t*b[1])
```

7.55 Finn s og t slik at $s[2,0] + t[1,1] = [5,3]$.

7.56 I trekanten ABC er M midtpunktet på AC. Skriv $\overrightarrow{BM}$ med $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ og $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

7.57 Finn feilen. Ola skal finne s og t slik at $s[1,2] + t[3,1] = [5,5]$, og setter opp $s + 2t = 5$ og $3s + t = 5$.

7.58 Vis at $[a,b] = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$ for alle tall a og b.

7.59 I et parallellogram ABCD med $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ ligger P på diagonalen AC slik at $AP = \frac{1}{3}AC$. Skriv $\overrightarrow{DP}$ som $s\vec{u} + t\vec{v}$.

7.60 Finn s og t slik at $s[1,2] + t[2,1] = [100,200]$.

7.4.1 Parallelle vektorer

EKSEMPEL *Er vektorene parallelle?*

Avgjør om vektorene er parallelle.

a) $[2,-3]$ og $[-6,9]$

b) $[4,2]$ og $[6,4]$

Løsning

a) $[-6,9] = -3[2,-3]$. Vektorene er parallelle, med motsatt retning.

b) $6 = 1{,}5 \cdot 4$, men $4 \neq 1{,}5 \cdot 2$. Vektorene er ikke parallelle. ∎

EKSEMPEL *Finn en ukjent koordinat*

Finn k slik at $[2,k] \parallel [3,6]$.

Løsning

$2 = 3t$ gir $t = \frac{2}{3}$. Da er $k = 6t = 4$. ∎

EKSEMPEL *Ligger punktene på linje?*

Avgjør om $A = (1,2)$, $B = (3,5)$ og $C = (7,11)$ ligger på en rett linje.

Løsning

$\overrightarrow{AB} = [2,3]$ og $\overrightarrow{AC} = [6,9] = 3\overrightarrow{AB}$. Vektorene er parallelle, så punktene ligger på en rett linje. ■

7.61 Avgjør om vektorene er parallelle. Finn i så fall t slik at den første er t ganger den andre.

a) $[6,-9]$ og $[2,-3]$

b) $[1,4]$ og $[4,1]$

c) $[-5,10]$ og $[1,-2]$

d) $[0,3]$ og $[0,-7]$

7.62 Finn k slik at vektorene er parallelle.

a) $[k,4]$ og $[3,2]$

b) $[2,-1]$ og $[k,5]$

c) $[k,6]$ og $[2,k]$, med $k > 0$

7.63 Avgjør om punktene ligger på en rett linje.

a) $(1,1)$, $(3,4)$ og $(7,10)$

b) $(0,2)$, $(2,3)$ og $(6,6)$

c) $(-1,5)$, $(1,1)$ og $(4,-5)$

7.64 $A = (2,1)$, $B = (5,7)$ og $C = (x,11)$ ligger på en rett linje. Finn x.

7.65 Finn en vektor med lengde 15 som er parallell med $[3,4]$ og har motsatt retning.

7.66 Vis at $A = (0,0)$, $B = (4,2)$, $C = (5,5)$ og $D = (1,3)$ er hjørner i et parallellogram.

7.67 Er firkanten med hjørner $(0,0)$, $(6,0)$, $(4,3)$ og $(1,3)$ et trapes? Begrunn svaret.

7.68 For hvilke k er $[k,1]$ og $[9,k]$ parallelle?

7.69 $\vec{a} = [2,3]$ og $\vec{b} = [4,k]$. Finn k slik at $\vec{a} + \vec{b}$ er parallell med $[1,2]$.

7.70 I trekanten ABC er M midtpunktet på AB og N midtpunktet på AC. Vis at $MN \parallel BC$.

7.71 Finn feilen. Lise sier at $[2,4]$ og $[3,5]$ er parallelle, fordi $3 = 1{,}5 \cdot 2$.

7.72 Hva blir utskriften?

Python

```
def parallelle(u, v):
    return u[0]*v[1] - v[0]*u[1] == 0

print(parallelle([1, 3], [2, 6]))
print(parallelle([1, 3], [3, 1]))
print(parallelle([2, -4], [-1, 2]))
```

7.73 Linja ℓ går gjennom $(1,2)$ og $(3,6)$. Linja m går gjennom $(0,5)$ og $(2,9)$. Er linjene parallelle?

7.74 Vis at hvis $\vec{a} \parallel \vec{b}$ og $\vec{b} \parallel \vec{c}$, så er $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

7.75 Finn k slik at $[k,100]$ er parallell med $[1,50]$.

7.5.1 Skalarprodukt

EKSEMPEL *Regn ut skalarproduktet*

a) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ og vinkelen mellom dem er $60°$. Finn $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

b) Finn $[2,3] \cdot [4,-1]$.

c) Står $[3,2]$ og $[-4,6]$ vinkelrett på hverandre?

Løsning

a) $4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6$

b) $2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 5$

c) $3 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 = 0$. Ja, de står vinkelrett på hverandre. ■

EKSEMPEL *Finn vinkelen*

Finn vinkelen mellom $\vec{a} = [1,0]$ og $\vec{b} = [1,1]$, og mellom $\vec{c} = [1,2]$ og $\vec{d} = [-2,-4]$.

Løsning

$\cos v = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, så vinkelen er $45°$.

$\vec{c} \cdot \vec{d} = -2 - 8 = -10$ og $|\vec{c}| \cdot |\vec{d}| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 10$.

$\cos v = -1$, så vinkelen er $180°$. Vektorene er parallelle med motsatt retning. ■

7.76 Regn ut.

a) $[3,4] \cdot [2,1]$

b) $[-1,5] \cdot [5,1]$

c) $[2,-3] \cdot [-4,-2]$

d) $[6,8] \cdot [6,8]$

7.77 Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{b}$ når

a) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, $v = 60°$

b) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $v = 180°$

c) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $v = 45°$

7.78 Står vektorene vinkelrett på hverandre?

a) $[4,6]$ og $[-3,2]$

b) $[1,2]$ og $[2,1]$

c) $[5,-2]$ og $[4,10]$

7.79 Finn k slik at vektorene står vinkelrett på hverandre.

a) $[k,2]$ og $[3,-6]$

b) $[2,k]$ og $[k,-8]$

c) $[k,k]$ og $[3,k-5]$

7.80 Finn vinkelen mellom vektorene.

a) $[1,1]$ og $[1,0]$

b) $[1,0]$ og $[-1,1]$

c) $[3,0]$ og $[0,-2]$

d) $[1,2]$ og $[2,4]$

7.81 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$. Finn vinkelen mellom vektorene.

7.82 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Regn ut

a) $\vec{a} \cdot \left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$

b) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$

c) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$

7.83 $A = (1,0)$, $B = (4,1)$ og $C = (2,3)$. Finn alle vinklene i trekanten ABC.

7.84 Avgjør om trekanten med hjørnene $(0,0)$, $(4,2)$ og $(1,4)$ er rettvinklet.

7.85 En kraft $\vec{F} = [10,5]$ N flytter en kjelke langs $\vec{s} = [20,0]$ m. Arbeidet er $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Regn ut arbeidet.

7.86 Finn feilen. Per skriver $[2,3] \cdot [4,5] = [8,15]$.

7.87 Hva blir utskriften?

Python

```
def skalar(u, v):
    return u[0]*v[0] + u[1]*v[1]

a = [2, 1]
for b in [[1, -2], [3, 0], [-2, -1]]:
    print(skalar(a, b))
```

7.88 Vis at $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

7.89 Bruk forrige oppgave til å vise Pytagoras' setning: Er $\vec{a} \perp \vec{b}$, er $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$.

7.90 Finn en vektor som står vinkelrett på $[100,7]$.

7.6.1 Geometriske anvendelser

EKSEMPEL *Avstand og midtpunkt*

$A = (-1,2)$ og $B = (5,10)$. Finn avstanden og midtpunktet.

Løsning

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+64} = 10$ og $M = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+10}{2}\right) = (2,6)$.

■

EKSEMPEL *Finn sentrum og radius*

Finn sentrum og radius for sirkelen $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 12$.

Løsning

$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 = 12 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

Sentrum er $(2,-3)$, og radius er 5.

■

EKSEMPEL *Tangent til en sirkel*

Sirkelen $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ går gjennom $P = (4,6)$. Finn tangenten i P.

Løsning

$$3(x-4) + 4(y-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + 9$$

■

7.91 Finn avstanden og midtpunktet.

a) $A = (1,2)$, $B = (7,10)$

b) $A = (-3,4)$, $B = (5,-2)$

c) $A = (0,0)$, $B = (2,2)$

7.92 $M = (3,2)$ er midtpunktet på AB, og $A = (1,-1)$. Finn B.

7.93 Finn likningen for sirkelen.

a) Sentrum $(0,0)$, radius 3

b) Sentrum $(2,-1)$, radius 4

c) Sentrum $(-3,0)$, radius $\sqrt{5}$

7.94 Finn sentrum og radius.

a) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 49$

b) $(x+2)^2 + y^2 = 8$

c) $x^2 + y^2 = 1$

7.95 Fullfør kvadratene og finn sentrum og radius.

a) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$

b) $x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 10y = 11$

7.96 En sirkel har sentrum $(1,3)$ og går gjennom $(4,7)$. Finn likningen.

7.97 $A = (-2,1)$ og $B = (4,9)$ er endepunktene på en diameter. Finn likningen for sirkelen.

7.98 Ligger punktet innenfor, på eller utenfor sirkelen $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$?

a) $(4,2)$

b) $(0,0)$

c) $(6,1)$

7.99 Finn tangenten til sirkelen $x^2 + y^2 = 10$ i punktet $(1,3)$.

7.100 Finn tangenten til sirkelen $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$ i punktet $(4,4)$.

7.101 Finn skjæringspunktene mellom sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ og linja $y = x + 1$.

7.102 Finn feilen. Nora sier at sirkelen $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ har sentrum $(2,-3)$ og radius 16.

7.103 Hva blir utskriften?

Python

```
a, b, r = 0, 0, 5
for x, y in [(3, 4), (1, 1), (5, 5)]:
    d2 = (x - a)**2 + (y - b)**2
    if d2 < r**2:
        print((x, y), "innenfor")
    elif d2 == r**2:
        print((x, y), "på")
    else:
        print((x, y), "utenfor")
```

7.104 Vis med vektorer at diagonalene i et rektangel er like lange.

7.105 Sirkelen $x^2 + y^2 = r^2$ har tangenten $y = 10 - x$. Finn r.

Fasit

7.1.1 Vektorbegrepet

7.1
a) Skalar
b) Vektor
c) Vektor
d) Skalar

7.2
a) 10
b) 13
c) $2\sqrt{2}$
d) $\sqrt{10}$

7.3
a) $\overrightarrow{DC}$
b) $\overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{BA}$ (eller $\overrightarrow{CD}$)
d) $\overrightarrow{BD}$

7.4
a) Sann
b) Usann
c) Sann
d) Sann

7.5
3 til høyre og 4 opp, eller 4 til høyre og 3 opp.

7.6
$\sqrt{300^2 + 400^2} = 500$ m

7.7
$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF}$

7.8
$\sqrt{16+9} = 5$ m/s

7.9
Lengden er aldri negativ. Den er 5.

7.10
```
5.0
10.0
2.0
```

7.11
$25 + b^2 = 169$ gir $b = 12$ eller $b = -12$.

7.12
$2a^2 = 10\,000$ gir $a = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$.

7.13
For eksempel to like piler 3 til høyre, og $\vec{c}$ som går 3 opp.

7.14
Vektoren fra A til A har lengde 0. Det er nullvektoren.

7.15
Den motsatte vektoren har motsatt retning, så begge stegene snur.
Lengden $\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ er den samme.

7.2.1 Sum, differanse og skalering

7.16
a) $\overrightarrow{AD}$
b) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
c) $\overrightarrow{CB}$
d) $\overrightarrow{AB}$

7.17
a) $5\vec{a}$
b) $3\vec{a} - \vec{b}$
c) $-\vec{a} + 2\vec{b}$
d) $2\vec{a} + 2\vec{b}$

7.18
a) 12
b) 8
c) 1

7.19
a) 13
b) 13
c) $\sqrt{100 + 144} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$

7.20
a) $\vec{v} - \vec{u}$
b) $\vec{u} - \vec{v}$
c) $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

7.21
a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{u} - \vec{v}$
c) $-\vec{u} - \vec{v}$

7.22
$\overrightarrow{AP} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\overrightarrow{AQ} = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$ og $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$.

7.23
$\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

7.24
Pilene henger ikke sammen. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, men $\overrightarrow{CD}$ starter i C, ikke i B.

7.25
5 0

7.26
$\sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ km/h, mot nordøst.

7.27
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

7.28
$\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AC}$.
Summen er $3\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AT} + 3\overrightarrow{AT} = \vec{0}$.

7.29
Tegn parallellogrammet med sidene $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Begge rekkefølgene ender i det samme motstående hjørnet.

7.30
$\vec{a}$ og $\vec{c}$ opphever hverandre, så summen er $\vec{b}$, med lengde 100.

7.3.1 Vektorer på koordinatform

7.31
a) $[-1, 3]$
b) $[-5, 5]$
c) $[6, -3]$
d) $[1, 2]$

7.32
a) $[3, 4]$, 5
b) $[5, -12]$, 13
c) $[1, 1]$, $\sqrt{2}$

7.33
a) 10
b) 25
c) $2\sqrt{5}$
d) 100

7.34
$B = (-1, 6)$

7.35
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = [3, 4]$, så $A = (3, 4)$.

7.36
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [1, 4]$, så $D = (1, 5)$.

7.37
$\vec{x} = [-2, 5]$

7.38
$2s = 10$ gir $s = 5$, og $t = 5$.

7.39
a) $[0, 1]$
b) $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$
c) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

7.40
$t^2 + 9 = 25$ gir $t = 4$ eller $t = -4$.

7.41
$|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{BC}| = |[-3, 4]| = 5$ og $|\overrightarrow{CA}| = |[-3, -4]| = 5$. Omkretsen er 16.

7.42
Han har regnet «start minus slutt».
Riktig er $\overrightarrow{AB} = [-4, 2]$.

7.43
`[-3, -4] 25`. Lengden er $\sqrt{25} = 5$.

7.44
Sidene er $|[3,4]| = 5$, $|[4,-3]| = 5$ og $|[7,1]| = \sqrt{50}$. To sider er like lange.

7.45
$\vec{a} + \vec{b} = [1,1]$, med lengde $\sqrt{2}$.

7.3.2 Dekomponering

7.46
a) $3\vec{e}_x - 5\vec{e}_y$

b) $2\vec{e}_y$

c) $[-2,5] = -2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$

7.47
$s = -4$ og $t = 7$

7.48
$s + t = 6$ og $s - t = 2$ gir $s = 4$ og $t = 2$.

7.49
$2s + t = 7$ og $s + 3t = 6$ gir $s = 3$ og $t = 1$.

7.50
$3s + t = 1$ og $-s + 2t = 5$ gir $s = -\frac{3}{7}$ og $t = \frac{16}{7}$.

7.51
$\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$

7.52
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = -\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{4}\vec{u} = -\frac{3}{4}\vec{u} + \vec{v}$

7.53
$[3,6] = 3[1,2]$, så alle kombinasjoner er parallelle med $[1,2]$. $[1,3]$ er ikke det.

7.54
```
4.0 2.0
6.0 2.0
```

7.55
$t = 3$ og $2s + 3 = 5$ gir $s = 1$.

7.56
$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

7.57
Han har blandet koordinatene. Riktig er $s + 3t = 5$ og $2s + t = 5$, som gir $s = 2$ og $t = 1$.

7.58
$a[1,0] + b[0,1] = [a,0] + [0,b] = [a,b]$

7.59
$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$

7.60
$[100,200] = 100[1,2]$, så $s = 100$ og $t = 0$.

7.4.1 Parallelle vektorer

7.61
a) $t = 3$
b) Ikke parallelle
c) $t = -5$
d) $t = -\frac{3}{7}$

7.62
a) $k = 6$
b) $k = -10$
c) $k^2 = 12$, $k = 2\sqrt{3}$

7.63
a) $[2,3]$ og $[6,9]$: ja
b) $[2,1]$ og $[6,4]$: nei
c) $[2,-4]$ og $[5,-10]$: ja

7.64
$\overrightarrow{AB} = [3,6]$ og $\overrightarrow{AC} = [x-2,10]$. $t = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, så $x - 2 = 5$ og $x = 7$.

7.65
$-3[3,4] = [-9,-12]$

7.66
$\overrightarrow{AB} = [4,2] = \overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{AD} = [1,3] = \overrightarrow{BC}$.

7.67
$[6,0]$ og $[3,0]$ (fra $(1,3)$ til $(4,3)$) er parallelle. Det er et trapes.

7.68
$k^2 - 9 = 0$ gir $k = 3$ eller $k = -3$.

7.69
$\vec{a} + \vec{b} = [6, 3+k] = 6[1,2]$ gir $3 + k = 12$, så $k = 9$.

7.70
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

7.71
Samme tall må gjelde for begge koordinatene. $1{,}5 \cdot 4 = 6 \neq 5$, så de er ikke parallelle.

7.72
```
True
False
True
```

7.73
Retningsvektorene er $[2,4]$ og $[2,4]$. Ja, og siden $(0,5)$ ikke ligger på ℓ, er de forskjellige.

7.74
$\vec{a} = s\vec{b}$ og $\vec{b} = t\vec{c}$ gir $\vec{a} = st\vec{c}$.

7.75
$k = 2$

7.5.1 Skalarprodukt

7.76
a) 10
b) 0
c) -2
d) 100

7.77
a) 15
b) -6
c) 4

7.78
a) Ja, $-12 + 12 = 0$
b) Nei, 4
c) Ja, $20 - 20 = 0$

7.79
a) $3k - 12 = 0$: $k = 4$
b) $2k - 8k = 0$: $k = 0$
c) $3k + k^2 - 5k = k(k-2) = 0$: $k = 0$ eller $k = 2$

7.80
a) 45°
b) 135°
c) 90°
d) 0°

7.81
$\cos v = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, så $v = 60°$.

7.82
a) $18 - 2 = 16$
b) $\sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$
c) $9 - 1 = 8$

7.83
$\overrightarrow{AB} = [3,1]$ og $\overrightarrow{AC} = [1,3]$: $\cos A = \frac{6}{10}$. $\overrightarrow{BA} = [-3,-1]$ og $\overrightarrow{BC} = [-2,2]$: $\cos B = \frac{4}{\sqrt{10}\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. $\overrightarrow{CA} = [-1,-3]$ og $\overrightarrow{CB} = [2,-2]$: $\cos C = \frac{4}{\sqrt{10}\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Trekanten er likebeint med $B = C \approx 63{,}4°$ og $A \approx 53{,}1°$.

7.84
Sidevektorene fra $(0,0)$ er $[4,2]$ og $[1,4]$, med skalarprodukt 12. Fra $(4,2)$: $[-4,-2]$ og $[-3,2]$, med skalarprodukt 8. Fra $(1,4)$: $[-1,-4]$ og $[3,-2]$, med skalarprodukt 5. Ingen er 0, så trekanten er ikke rettvinklet.

7.85
$W = 200$ J

7.86
Skalarproduktet er et tall: $8 + 15 = 23$.

7.87
```
0
6
-5
```

7.88
$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

7.89
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, så leddet $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ forsvinner.

7.90
For eksempel $[7,-100]$.

7.6.1 Geometriske anvendelser

7.91
a) 10 og $(4,6)$

b) 10 og $(1,1)$

c) $2\sqrt{2}$ og $(1,1)$

7.92
$B=(5,5)$

7.93
a) $x^2+y^2=9$

b) $(x-2)^2+(y+1)^2=16$

c) $(x+3)^2+y^2=5$

7.94
a) $(4,1)$, 7

b) $(-2,0)$, $2\sqrt{2}$

c) $(0,0)$, 1

7.95
a) $(x+1)^2+(y-2)^2=9$: $(-1,2)$, 3

b) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$: $(4,-3)$, 5

c) $x^2+(y-5)^2=36$: $(0,5)$, 6

7.96
$r=|[3,4]|=5$: $(x-1)^2+(y-3)^2=25$

7.97
Sentrum $(1,5)$, radius 5: $(x-1)^2+(y-5)^2=25$

7.98
a) $9+16=25$: på

b) $1+4=5$: innenfor

c) $25+9=34$: utenfor

7.99
$1(x-1)+3(y-3)=0$ gir $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$.

7.100
$\overrightarrow{SP}=[2,3]$: $2(x-4)+3(y-4)=0$ gir $y=-\frac{2}{3}x+\frac{20}{3}$.

7.101
$x^2+(x+1)^2=25$ gir $x^2+x-12=0$, så $x=3$ eller $x=-4$. Punktene er $(3,4)$ og $(-4,-3)$.

7.102
Sentrum er $(-2,3)$, og radius er $\sqrt{16}=4$.

7.103
```
(3, 4) på
(1, 1) innenfor
(5, 5) utenfor
```

7.104
Med sidene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, der $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, er $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=|\vec{v}-\vec{u}|^2$.

7.105
Tangeringspunktet ligger der normalen $y=x$ treffer linja: $(5,5)$. $r=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.