6 Omvendte funksjoner

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK R1

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

OMVENDTE FUNKSJONER

Omvendt funksjon

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Opphever hverandre

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Mengder

$$D_{f^{-1}} = V_f, \quad V_{f^{-1}} = D_f$$

Speiling om $y = x$

$$(a, b) \text{ på } f \Leftrightarrow (b, a) \text{ på } f^{-1}$$

DEN DERIVERTE

Den deriverte

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \quad f(a) = b$$

Generelt

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$, fordi $\ln x$ er den omvendte funksjonen til e^x.

6.1.1 Omvendte funksjoner

EKSEMPEL *Finn den omvendte funksjonen*

Finn den omvendte funksjonen.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = e^x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

Løsning

a) $y = 2x + 3$ gir $x = \dfrac{y-3}{2}$. Altså er $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

b) $y = e^x + 1$ gir $e^x = y - 1$ og $x = \ln(y-1)$. Altså er $f^{-1}(x) = \ln(x-1)$, med $D_{f^{-1}} = \langle 1, \to \rangle$, som er verdimengden til f.

c) $y(x-2) = x + 1$ gir $yx - x = 2y + 1$, så $x(y-1) = 2y + 1$ og $x = \dfrac{2y+1}{y-1}$. Altså er $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

■

EKSEMPEL *Kvadratroten som omvendt funksjon*

Funksjonen $f(x) = x^2$ med $D_f = [0, \to\rangle$ er gitt. Finn f^{-1}.

Løsning

$y = x^2$ med $x \geqslant 0$ gir $x = \sqrt{y}$. Altså er $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, med $D_{f^{-1}} = [0, \to\rangle$.

■

6.1 Finn $f^{-1}(x)$.

a) $f(x) = x + 7$

b) $f(x) = 4x$

c) $f(x) = 2x - 8$

d) $f(x) = \dfrac{x}{3} + 1$

6.2 Finn $f^{-1}(x)$.

a) $f(x) = 6 - 3x$

b) $f(x) = x^3 + 2$

c) $f(x) = (x-1)^3$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

6.3 Finn $f^{-1}(x)$ og definisjonsmengden til f^{-1}.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = 3e^x - 1$

d) $f(x) = e^{x-4}$

6.4 Finn $f^{-1}(x)$.

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = \ln(x+5)$

c) $f(x) = 2\ln x$

d) $f(x) = \ln(3x) - 1$

6.5 Finn $f^{-1}(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

6.6 Funksjonen $f(x) = 5x + 2$ er gitt. Finn

a) $f^{-1}(12)$

b) $f^{-1}(2)$

c) $f^{-1}(f(100))$

d) $f\left(f^{-1}(-3)\right)$

6.7 Avgjør om funksjonen er én-entydig. Begrunn svaret.

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = x^3 + x$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = |x|$

6.8 Begrens definisjonsmengden slik at funksjonen blir én-entydig, og finn den omvendte funksjonen.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $x \geqslant 0$

b) $f(x) = (x+2)^2$, $x \geqslant -2$

c) $f(x) = x^2 - 6x$, $x \geqslant 3$

6.9 Funksjonen $f(x) = \sqrt{2x+4}$ er gitt.

a) Finn D_f og V_f.

b) Finn $f^{-1}(x)$, $D_{f^{-1}}$ og $V_{f^{-1}}$.

6.10 Vis at f og g er omvendte funksjoner ved å regne ut $f(g(x))$.

a) $f(x) = 3x - 2$ og $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

b) $f(x) = e^{2x}$ og $g(x) = \ln\sqrt{x}$

6.11 Finn feilen. Ola sier at den omvendte funksjonen til $f(x) = x^2$ er $\sqrt{x}$ for alle x.

6.12 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return 3*x + 1

def g(x):
    return (x - 1) / 3

for x in [0, 2, 10]:
    print(f(x), g(f(x)))
```

6.13 Folketallet i en by er $N(t) = 5000 \cdot 1{,}02^t$ etter t år.

a) Finn den omvendte funksjonen $t(N)$.

b) Hva forteller den omvendte funksjonen?

6.14 Funksjonen $f(x) = x + \ln x$ er gitt. Finn $f^{-1}(1)$ og $f^{-1}(e+1)$.

6.15 Vis at $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ er sin egen omvendte funksjon.

6.16 Finn den omvendte funksjonen til $f(x) = x^{100}$ med $x \geqslant 0$, og finn $f^{-1}\left(2^{100}\right)$.

6.2.1 Grafisk forståelse

EKSEMPEL *Punkter på den omvendte grafen*

Grafen til f går gjennom punktene $(0,2)$, $(1,5)$ og $(3,11)$. Finn tre punkter på grafen til f^{-1}, og finn $f^{-1}(5)$.

Løsning

$(2,0)$, $(5,1)$ og $(11,3)$ ligger på grafen til f^{-1}. $f^{-1}(5) = 1$.

■

EKSEMPEL *Asymptoter til den omvendte funksjonen*

Funksjonen $f(x) = e^x + 2$ har den horisontale asymptoten $y = 2$. Hvilken asymptote har f^{-1}? Kontroller ved å finne $f^{-1}(x)$.

Løsning

Speilingen gjør $y = 2$ til $x = 2$, så f^{-1} har den vertikale asymptoten $x = 2$.

Kontroll: $f^{-1}(x) = \ln(x-2)$, som har en vertikal asymptote i $x = 2$.

■

6.17 Grafen til f går gjennom punktene $(-1,3)$, $(0,4)$ og $(2,9)$.

a) Finn tre punkter på grafen til f^{-1}.

b) Finn $f^{-1}(9)$.

6.18 Hva er speilbildet av punktet om linja $y = x$?

a) $(2,5)$

b) $(-3,1)$

c) $(4,4)$

d) $(0,-2)$

6.19 Finn asymptotene til f^{-1} når

a) f har asymptoten $y = 4$,

b) f har asymptotene $x = -1$ og $y = 2$.

6.20 Funksjonen $f(x) = e^x - 3$ er gitt.

a) Finn asymptoten og verdimengden til f.

b) Finn asymptoten og definisjonsmengden til f^{-1}.

c) Finn $f^{-1}(x)$.

6.21 Forklar sammenhengen mellom grafene til 10^x og $\lg x$. Hvilke punkter svarer til $(1,10)$ og $(2,100)$?

6.22 Finn skjæringspunktet mellom grafene til f og f^{-1}.

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 3$

6.23 Funksjonen $f(x) = x^3$ er gitt. Finn skjæringspunktene mellom grafen til f og grafen til f^{-1}.

6.24 f er voksende. Er f^{-1} voksende eller avtakende? Forklar med speiling.

6.25 Grafen til f har et vendepunkt i $(1,3)$. Hvilket punkt på grafen til f^{-1} er et vendepunkt?

6.26 Funksjonen $f(x) = \ln(x-1)$ er gitt.

a) Finn definisjonsmengden og asymptoten til f.

b) Finn $f^{-1}(x)$ og asymptoten til f^{-1}.

6.27 Finn feilen. Lise sier at grafen til f^{-1} er speilbildet av grafen til f om x-aksen.

6.28 Hva blir utskriften?

Python

```
punkter = [(0, 1), (1, 3), (2, 9)]
for x, y in punkter:
    print((y, x))
```

Hvilken funksjon ligger de nye punktene på?

6.29 Skisser grafen til $f(x) = \sqrt{x}$ og speil den om $y = x$. Hvilken funksjon får du?

6.30 Vis at $e^x > x + 1$ for alle $x \neq 0$, og bruk speiling til å forklare at $\ln x < x - 1$ for alle $x \neq 1$, $x > 0$.

6.31 For hvilke verdier av a har $f(x) = ax + 1$ en omvendt funksjon med samme graf som f?

6.3.1 Den deriverte av en omvendt funksjon

EKSEMPEL *Den deriverte uten et uttrykk*

Funksjonen $f(x) = x^3 + x$ er gitt. Finn $\left(f^{-1}\right)'(2)$, og finn tangenten til grafen til f^{-1} i punktet $(2,1)$.

Løsning

$f(1) = 2$, så $a = 1$. $f'(x) = 3x^2 + 1$ gir $f'(1) = 4$.

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{4}$$

Tangenten er $y = \dfrac{1}{4}(x-2) + 1 = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$. Vi har funnet den uten å kjenne et uttrykk for f^{-1}.

■

EKSEMPEL *Kvadratroten som omvendt funksjon*

Bruk regelen til å vise at $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Løsning

$f'(x) = 2x$, så

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{f'\left(\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■

6.32 Tangenten til f i punktet (a, b) har stigningstallet k. Finn stigningstallet til tangenten til f^{-1} i (b, a).

a) $k = 2$

b) $k = -5$

c) $k = \dfrac{3}{4}$

6.33 Finn $\left(f^{-1}\right)'(b)$.

a) $f(x) = 4x - 3$, $b = 1$

b) $f(x) = x^3$, $b = 27$

c) $f(x) = x^2$ med $x \geqslant 0$, $b = 9$

6.34 Finn $\left(f^{-1}\right)'(b)$.

a) $f(x) = x^3 + 2x$, $b = 3$

b) $f(x) = x^5 + x$, $b = 2$

c) $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $b = 3$

6.35 Finn $\left(f^{-1}\right)'(b)$.

a) $f(x) = e^x$, $b = e^2$

b) $f(x) = e^x + 2x$, $b = 1$

c) $f(x) = x + \ln x$, $b = 1$

6.36 Funksjonen $f(x) = x^3 + x + 2$ er gitt. Finn tangenten til grafen til f^{-1} i punktet $(4, 1)$.

6.37 Bruk at $\ln x$ er den omvendte funksjonen til e^x til å vise at $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

6.38 Bruk regelen for den deriverte av en omvendt funksjon til å finne

a) $\left(\sqrt[3]{x}\right)'$, med $f(x) = x^3$,

b) $\left(\sqrt{x}\right)'$, med $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$.

6.39 Finn $(\lg x)'$ ved å bruke at $\lg x$ er den omvendte funksjonen til 10^x.

6.40 Funksjonen $f(x) = 2x + e^x$ er gitt.

a) Vis at f er voksende.

b) Finn $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

6.41 Finn feilen. Tor skal finne $\left(f^{-1}\right)'(9)$ for $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$, og skriver $\dfrac{1}{f'(9)} = \dfrac{1}{18}$.

6.42 Hvor har grafen til f^{-1} loddrett tangent når $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$?

6.43 Hva blir utskriften?

Python

```
def fd(x):
    return 2*x + 1

for a in [1, 2, 3]:
    print(a**2 + a, 1 / fd(a))
```

Hvilken funksjon f og hvilken omvendt funksjon handler det om?

6.44 Funksjonen $f(x) = e^x + x^3$ er gitt. Finn $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

6.45 Vis at $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ ved å derivere $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

6.46 Funksjonen $f(x) = x^{101} + x$ er gitt. Finn $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

Fasit

6.1.1 Omvendte funksjoner

6.1
a) $x-7$
b) $\frac{x}{4}$
c) $\frac{x+8}{2}$
d) $3(x-1)$

6.2
a) $\frac{6-x}{3}$
b) $\sqrt[3]{x-2}$
c) $1+\sqrt[3]{x}$
d) x^5

6.3
a) $\ln x$, $x>0$
b) $\frac{1}{2}\ln x$, $x>0$
c) $\ln\frac{x+1}{3}$, $x>-1$
d) $4+\ln x$, $x>0$

6.4
a) e^x
b) e^x-5
c) $e^{x/2}$
d) $\frac{e^{x+1}}{3}$

6.5
a) $\frac{1}{x}$
b) $2+\frac{1}{x}$
c) $\frac{x}{1-x}$
d) $\frac{3x+1}{2-x}$

6.6
a) 2
b) 0
c) 100
d) -3

6.7
a) Nei, $f(2)=f(-2)$.
b) Ja, $f'(x)=3x^2+1>0$.
c) Ja, avtakende.
d) Nei, $f(1)=f(-1)$.

6.8
a) $\sqrt{x-1}$
b) $\sqrt{x}-2$
c) $(x-3)^2-9$ gir $f^{-1}(x)=3+\sqrt{x+9}$

6.9
a) $D_f=[-2,\to\rangle$, $V_f=[0,\to\rangle$
b) $f^{-1}(x)=\frac{x^2-4}{2}$, $D_{f^{-1}}=[0,\to\rangle$, $V_{f^{-1}}=[-2,\to\rangle$

6.10
a) $3\cdot\frac{x+2}{3}-2=x$
b) $e^{2\ln\sqrt{x}}=e^{\ln x}=x$

6.11
x^2 er ikke én-entydig når x kan være negativ. Bare med $D_f=[0,\to\rangle$ er $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

6.12

```
1 0.0
7 2.0
31 10.0
```

6.13
a) $t(N)=\frac{\ln(N/5000)}{\ln 1{,}02}$
b) Hvor mange år det tar før folketallet er N.

6.14
$f(1)=1$ og $f(e)=e+1$, så $f^{-1}(1)=1$ og $f^{-1}(e+1)=e$.

6.15
$y(x-2)=2x+3$ gir $x(y-2)=2y+3$, så $f^{-1}(x)=\frac{2x+3}{x-2}=f(x)$.

6.16
$f^{-1}(x)=x^{1/100}$, og $f^{-1}\left(2^{100}\right)=2$.

6.2.1 Grafisk forståelse

6.17
a) $(3,-1)$, $(4,0)$ og $(9,2)$
b) 2

6.18
a) $(5,2)$
b) $(1,-3)$
c) $(4,4)$
d) $(-2,0)$

6.19
a) $x=4$
b) $y=-1$ og $x=2$

6.20
a) $y=-3$, $V_f=\langle-3,\to\rangle$
b) $x=-3$, $D_{f^{-1}}=\langle-3,\to\rangle$
c) $\ln(x+3)$

6.21
Grafene er speilbilder om $y=x$.
$(10,1)$ og $(100,2)$ ligger på grafen til $\lg x$.

6.22
a) $3x-4=x$ gir $(2,2)$
b) $\frac{x}{2}+3=x$ gir $(6,6)$

6.23
$x^3=x$ gir $x=-1$, 0 og 1. Punktene er $(-1,-1)$, $(0,0)$ og $(1,1)$.

6.24
Voksende. Når x øker, øker y, og ved speiling bytter de bare plass.

6.25
$(3,1)$

6.26
a) $x>1$, asymptote $x=1$
b) $f^{-1}(x)=e^x+1$, asymptote $y=1$

6.27
Det er speiling om linja $y=x$, ikke om x-aksen. Speiling om x-aksen gir grafen til $-f(x)$.

6.28

```
(1, 0)
(3, 1)
(9, 2)
```

Punktene ligger på den omvendte funksjonen til 3^x, altså $\frac{\ln x}{\ln 3}$.

6.29
x^2 med $x\geqslant 0$.

6.30
$g(x)=e^x-x-1$ har bunnpunkt $(0,0)$, så $e^x\geqslant x+1$ med likhet bare i $x=0$. Linja $y=x+1$ speilet om $y=x$ er $y=x-1$, og e^x speilet er $\ln x$. Siden e^x ligger over linja, ligger $\ln x$ under den speilede linja.

6.31
$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{a}$. Den er lik $ax+1$ når $a=-1$.

6.3.1 Den deriverte av en omvendt funksjon

6.32
a) $\frac{1}{2}$
b) $-\frac{1}{5}$
c) $\frac{4}{3}$

6.33
a) $\frac{1}{4}$
b) $f(3)=27$, $f'(3)=27$: $\frac{1}{27}$
c) $f(3)=9$, $f'(3)=6$: $\frac{1}{6}$

6.34
a) $f(1)=3$, $f'(1)=5$: $\frac{1}{5}$
b) $f(1)=2$, $f'(1)=6$: $\frac{1}{6}$
c) $f(1)=3$, $f'(1)=6$: $\frac{1}{6}$

6.35

a) $\dfrac{1}{e^2}$

b) $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$: $\dfrac{1}{3}$

c) $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$: $\dfrac{1}{2}$

6.36

$f(1) = 4$ og $f'(1) = 4$, så $\left(f^{-1}\right)'(4) = \dfrac{1}{4}$.

$y = \dfrac{1}{4}(x-4) + 1 = \dfrac{1}{4}x$.

6.37

$(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$

6.38

a) $\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

6.39

$\dfrac{1}{10^{\lg x}\ln 10} = \dfrac{1}{x\ln 10}$

6.40

a) $f'(x) = 2 + e^x > 0$

b) $f(0) = 1$ og $f'(0) = 3$: $\dfrac{1}{3}$

6.41

Han skal bruke $a = 3$, fordi $f(3) = 9$.

Riktig er $\dfrac{1}{f'(3)} = \dfrac{1}{6}$.

6.42

$f'(x) = 3(x-1)^2 = 0$ i $x = 1$, og $f(1) = 1$. Grafen til f^{-1} har loddrett tangent i $(1, 1)$.

6.43

```
2 0.3333333333333333
6 0.2
12 0.14285714285714285
```

$f(x) = x^2 + x$ med $x > 0$. Tallene er $b = f(a)$ og $\left(f^{-1}\right)'(b)$.

6.44

$f(0) = 1$ og $f'(0) = 1$, så $\left(f^{-1}\right)'(1) = 1$.

6.45

Kjerneregelen gir $f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) = 1$.

6.46

$f(1) = 2$ og $f'(1) = 101 + 1 = 102$, så $\dfrac{1}{102}$.