5 Hva bruker vi den deriverte til?

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK R1

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

MONOTONI OG EKSTREMALPUNKTER

Voksende

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow f \text{ voksende}$$

Avtakende

$$f'(x) < 0 \Longrightarrow f \text{ avtakende}$$

Toppunkt

$$f'(a) = 0$$

$$f' \text{ skifter fra } + \text{ til } -$$

Bunnpunkt

$$f'(a) = 0$$

$$f' \text{ skifter fra } - \text{ til } +$$

Terrassepunkt

$$f'(a) = 0$$

$$f' \text{ skifter ikke fortegn}$$

KRUMNING

Andrederivert

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)'$$

Hul side opp / ned

$$f''(x) > 0 \quad / \quad f''(x) < 0$$

Vendepunkt

$$f'' \text{ skifter fortegn i } a$$

Andrederiverttesten

$$f'(a) = 0 \text{ og } f''(a) < 0$$

$$\Longrightarrow \text{toppunkt}$$

$$f'(a) = 0 \text{ og } f''(a) > 0$$

$$\Longrightarrow \text{bunnpunkt}$$

TANGENTER

Tangent

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Normal

$$\text{stigningstall } -\frac{1}{f'(a)}$$

Retningsvektor

$$\vec{r} = [1, f'(a)]$$

NUMERISKE METODER OG GRENSEVERDIER

Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

L'Hôpitals regel

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5.1.1 Monotoni

EKSEMPEL *Fortegnslinje for en tredjegradsfunksjon*

Finn hvor $f(x) = x^3 - 3x$ er voksende og avtakende.

Løsning

$f'(x) = 3(x+1)(x-1)$ er 0 for $x = -1$ og $x = 1$.

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
f	voksende	avtakende	voksende

f er voksende i $\langle \leftarrow, -1]$ og i $[1, \rightarrow\rangle$, og avtakende i $[-1, 1]$. ∎

EKSEMPEL *Monotoni med e*

Finn hvor $f(x) = xe^{-x}$ er voksende og avtakende.

Løsning

$f'(x) = e^{-x}(1-x)$. Siden $e^{-x} > 0$, har $f'(x)$ samme fortegn som $1 - x$.

	$x < 1$	$x > 1$
e^{-x}	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$

f er voksende i $\langle \leftarrow, 1]$ og avtakende i $[1, \rightarrow\rangle$. ∎

5.1 Finn hvor funksjonen er voksende og hvor den er avtakende.

a) $f(x) = x^2 - 6x$

b) $f(x) = 8 + 2x - x^2$

c) $f(x) = 3x - 5$

5.2 Lag en fortegnslinje for $f'(x)$, og finn hvor f er voksende og avtakende.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = x^3 - 27x$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

5.3 Fortegnslinja viser fortegnet til $f'(x)$.

	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 5$	$x > 5$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

a) Hvor er f voksende og avtakende?

b) Hva skjer i $x = 2$?

5.4 Finn hvor funksjonen er voksende.

a) $f(x) = x^4 - 8x^2$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3$

5.5 Finn hvor funksjonen er voksende og avtakende.

a) $f(x) = e^x - 2x$

b) $f(x) = xe^{2x}$

c) $f(x) = (x-3)e^x$

5.6 Finn hvor funksjonen er voksende og avtakende. Husk definisjonsmengden.

a) $f(x) = x - 2\ln x$

b) $f(x) = x^2 - 2\ln x$

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

5.7 Finn hvor funksjonen er voksende og avtakende.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

5.8 Vis at funksjonen er voksende for alle x.

a) $f(x) = x^3 + 2x$

b) $f(x) = x + e^x$

c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

5.9 For hvilke verdier av a er $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x$ voksende for alle x?

5.10 Finn feilen. Ola sier: «$f(x) = x^2 - 4$ er avtakende når $-2 < x < 2$, fordi $f(x) < 0$ der.»

5.11 Skisser en graf som er

a) voksende overalt og har $f'(0) = 0$,

b) avtakende for $x < 1$ og voksende for $x > 1$,

c) voksende med stadig mindre stigning.

5.12 Hva blir utskriften?

Python

```
def fd(x):
    return x**2 - 4*x

for x in [-1, 1, 5]:
    if fd(x) > 0:
        print(x, "+")
    else:
        print(x, "-")
```

5.13 Vis at $\ln x < x - 1$ for alle $x > 1$.

5.14 Funksjonen $f(x) = x^{100} - 100x$ er gitt. Finn hvor den er voksende og avtakende.

5.15 Finn hvor $f(x) = x^2e^{-x}$ er voksende.

5.2.1 Topp- og bunnpunkter

EKSEMPEL *Topp og bunn for en tredjegradsfunksjon*

Finn topp- og bunnpunktene til $f(x) = x^3 - 3x$.

Løsning

f' skifter fra $+$ til $-$ i $x = -1$ og fra $-$ til $+$ i $x = 1$.

$f(-1) = -1 + 3 = 2$ og $f(1) = 1 - 3 = -2$.

Toppunktet er $(-1, 2)$, og bunnpunktet er $(1, -2)$. ■

EKSEMPEL *Toppunkt med e*

Finn toppunktet til $f(x) = xe^{-x}$.

Løsning

f' skifter fra $+$ til $-$ i $x = 1$. $f(1) = e^{-1}$, så toppunktet er $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. ■

EKSEMPEL *Terrassepunkt*

Undersøk $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ for topp- og bunnpunkter.

Løsning

$f'(x) = 3(x-1)^2$ er 0 i $x = 1$ og positiv ellers. Den skifter ikke fortegn, så f har ingen topp- eller bunnpunkter. Punktet $(1, 1)$ er et terrassepunkt: Grafen flater ut og fortsetter oppover. ■

EKSEMPEL *Største og minste verdi*

Finn den største og den minste verdien til $f(x) = x^3 - 3x$ i intervallet $[-2, 3]$.

Løsning

$f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$ og $f(3) = 18$.

Den største verdien er 18 (i $x = 3$), og den minste er -2 (i $x = -2$ og $x = 1$). Toppunktet $(-1, 2)$ er bare et lokalt toppunkt. ■

5.16 Finn topp- eller bunnpunktet.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 6x$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 3$

5.17 Finn topp- og bunnpunktene.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $f(x) = -x^3 + 12x + 1$

5.18 Finn topp-, bunn- og terrassepunktene.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

5.19 Finn topp- og bunnpunktene eksakt.

a) $f(x) = xe^{-x}$

b) $f(x) = x^2e^x$

c) $f(x) = e^x - x$

5.20 Finn topp- eller bunnpunktet eksakt.

a) $f(x) = x \ln x$

b) $f(x) = x - \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

5.21 Finn den største og den minste verdien i intervallet.

a) $f(x) = x^2 - 2x$ i $[0, 4]$

b) $f(x) = x^3 - 12x$ i $[-3, 3]$

c) $f(x) = x^3 - 12x$ i $[0, 5]$

5.22 Finn den største og den minste verdien til $f(x) = xe^{-x}$ i intervallet $[0, 3]$.

5.23 Finn topp- og bunnpunktene til $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

5.24 Funksjonen $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ har et bunnpunkt i $(2, 1)$. Finn a og b.

5.25 Finn feilen. Lise sier at $f(x) = x^3$ har et toppunkt eller bunnpunkt i $x = 0$, fordi $f'(0) = 0$.

5.26 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return x**2 - 6*x

minst = f(0)
for x in range(0, 7):
    if f(x) < minst:
        minst = f(x)
print(minst)
```

5.27 Funksjonen $f(x) = x^{50} - 50x$ er gitt. Finn bunnpunktet.

5.28 Finn k slik at $f(x) = x^2 - kx + 9$ har bunnpunkt på x-aksen. Finn begge løsningene.

5.29 Skisser grafen til en funksjon som har et toppunkt i $(1, 3)$, et bunnpunkt i $(4, -1)$ og ingen andre ekstremalpunkter.

5.30 Forklar hvorfor en tredjegradsfunksjon har enten to ekstremalpunkter eller ingen.

5.2.2 Optimering

EKSEMPEL *Gjerdet mot låveveggen*

Bonden har 100 meter gjerde. Finn sidene som gir størst areal, og finn arealet.

Løsning

Arealet er $A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$, med $0 < x < 50$.

$A'(x) = 100 - 4x = 0$ gir $x = 25$. A' skifter fra $+$ til $-$ der, så det er et toppunkt.

Sidene bør være 25 m, 50 m og 25 m. Arealet blir $A(25) = 25 \cdot 50 = 1250$ m².

■

EKSEMPEL *Esken uten lokk*

Fra en kvadratisk papplate på 30×30 cm klipper vi ut et kvadrat med side x i hvert hjørne og bretter opp kantene. Finn x slik at esken får størst volum.

Løsning

$V(x) = x(30 - 2x)^2$, med $0 < x < 15$.

Produktregelen og kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} V'(x) &= (30 - 2x)^2 + x \cdot 2(30 - 2x)(-2) \\ &= (30 - 2x)(30 - 6x) \end{aligned}$$

$V'(x) = 0$ gir $x = 5$ (og $x = 15$, som ikke er med). V' skifter fra $+$ til $-$ i $x = 5$.

Esken får størst volum når $x = 5$ cm. Volumet er $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000$ cm³.

■

EKSEMPEL *Billettprisen*

En konsert har 1000 tilskuere når billetten koster 300 kroner. For hver 10 kroner prisen øker, mister arrangøren 20 tilskuere. Hvilken pris gir størst inntekt?

Løsning

$R(x) = (300 + 10x)(1000 - 20x)$, med $0 \leqslant x \leqslant 50$.

$R'(x) = 10(1000 - 20x) - 20(300 + 10x) = 4000 - 400x = 0$ gir $x = 10$.

Prisen bør være 400 kroner. Da kommer 800 tilskuere, og inntekten blir 320 000 kroner.

■

5.31 To positive tall har summen 20. Finn tallene når produktet er størst mulig.

5.32 Et rektangel har omkrets 60 cm. Finn det største arealet.

5.33 En bonde har 80 meter gjerde til en rektangulær innhegning inntil en elv. Elva er den fjerde siden. Finn det største arealet.

5.34 Et rektangel skal ha arealet 100 cm². Finn den minste omkretsen.

5.35 Fra en papplate på 12×12 cm klipper vi ut et kvadrat med side x i hvert hjørne og bretter opp kantene. Finn det største volumet.

5.36 En papplate er 16×10 cm. Vi klipper ut kvadrater med side x i hjørnene. Vis at volumet er $V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x)$, og finn x som gir størst volum.

5.37 Et busselskap kjører en tur for 50 personer til 400 kroner per person. For hver 20 kroner prisen senkes, kommer det 5 flere. Hvilken pris gir størst inntekt?

5.38 Kostnaden for å lage x enheter er $K(x) = x^2 + 40x + 1600$. Finn antall enheter som gir lavest kostnad per enhet.

5.39 Finn punktet på linja $y = 2x + 5$ som ligger nærmest origo.

5.40 Konsentrasjonen av et stoff er $K(t) = 6te^{-t}$ mg/L. Når er den høyest, og hva er den da?

5.41 En sylinderformet boks uten lokk skal ha volumet 27π cm³. Finn radiusen som gir minst overflate.

5.42 Et vindu har form som et rektangel med en halvsirkel oppå. Omkretsen er 4 m. La bredden være $2r$. Vis at arealet er $A(r) = 4r - 2r^2 - \dfrac{\pi r^2}{2}$, og finn r som gir størst areal.

5.43 Hva blir utskriften?

Python

```
def A(x):
    return x*(80 - 2*x)

for x in [10, 20, 30]:
    print(x, A(x))
```

Hvilken x gir størst areal?

5.44 Finn feilen. Per skal finne det største arealet til et rektangel med omkrets 20 og skriver: «$A = xy$, så $A' = y$. $A' = 0$ gir $y = 0$.»

5.45 To positive tall har produktet 36. Finn den minste mulige summen.

5.3.1 Krumning og vendepunkter

EKSEMPEL *Finn den andrederiverte*

Finn $f''(x)$.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = \ln x$

Løsning

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$ og $f''(x) = 6x$

b) $f'(x) = 2e^{2x}$ og $f''(x) = 4e^{2x}$

c) $f'(x) = x^{-1}$ og $f''(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

■

EKSEMPEL *Vendepunkter for en fjerdegradsfunksjon*

Finn vendepunktene til $f(x) = x^4 - 6x^2$, og hvor grafen vender den hule siden opp og ned.

Løsning
$f'(x) = 4x^3 - 12x$ og $f''(x) = 12(x+1)(x-1)$.

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
graf	hul side opp	hul side ned	hul side opp

f'' skifter fortegn i $x = \pm 1$. $f(\pm 1) = 1 - 6 = -5$, så vendepunktene er $(-1, -5)$ og $(1, -5)$. ∎

EKSEMPEL *Vendepunkt med e*
Finn vendepunktet til $f(x) = xe^{-x}$.

Løsning
$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(x-2)$$
f'' skifter fra $-$ til $+$ i $x = 2$. Vendepunktet er $\left(2, 2e^{-2}\right)$. ∎

EKSEMPEL *Bruk andrederiverttesten*
Bruk andrederiverttesten på $f(x) = x^3 - 3x$.

Løsning
$f''(-1) = -6 < 0$, så $(-1, 2)$ er et toppunkt. $f''(1) = 6 > 0$, så $(1, -2)$ er et bunnpunkt. ∎

5.46 Finn $f''(x)$.

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

5.47 Finn $f''(x)$.

a) $f(x) = xe^x$

b) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = x^{100}$

5.48 Finn vendepunktet.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 + 6x^2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x$

5.49 Finn vendepunktene, og hvor grafen vender den hule siden opp og ned.

a) $f(x) = x^4 - 6x^2$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3$

5.50 Finn vendepunktet eksakt.

a) $f(x) = xe^{-x}$

b) $f(x) = xe^x$

c) $f(x) = x^2 \ln x$

5.51 Bruk andrederiverttesten til å avgjøre om punktene er topp- eller bunnpunkter.

a) $f(x) = x^3 - 12x$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$

5.52 Funksjonen $f(x) = x^4$ er gitt.

a) Vis at $f'(0) = 0$ og $f''(0) = 0$.

b) Hva slags punkt er $(0, 0)$?

5.53 En bil har posisjonen $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ meter.

a) Finn farten og akselerasjonen.

b) Når står bilen stille?

c) Når er akselerasjonen 0?

5.54 Antall smittede er $N(t) = 60t^2 - 2t^3$ de første 20 dagene.

a) Når øker antallet raskest?

b) Hvor fort øker det da?

5.55 Finn a slik at $f(x) = x^3 + ax^2$ har vendepunkt i $x = 2$.

5.56 Finn feilen. Mats sier at $f(x) = x^3 - 3x$ har toppunkt i $x = 1$, fordi $f'(1) = 0$ og $f''(1) = 6 > 0$.

5.57 Skisser en graf som stiger hele tida, men der

a) stigningen øker,

b) stigningen avtar,

c) det er et vendepunkt i $x = 0$.

5.58 Hva blir utskriften?

Python
```
def f2(x):
    return 12*x**2 - 12

for x in [-2, 0, 2]:
    print(x, f2(x) > 0)
```

5.59 Vis at grafen til $f(x) = e^x + x^2$ vender den hule siden opp overalt.

5.60 En logistisk modell er $N(t) = \dfrac{800}{1 + 15e^{-0{,}5\,t}}$. Vendepunktet er der $N(t) = 400$. Finn t i vendepunktet eksakt.

5.4.1 Tangenter

EKSEMPEL *Tangent parallell med en linje*
Finn tangenten til $f(x) = x^2 - 2x$ som er parallell med linja $y = 4x + 1$.

Løsning
$f'(x) = 2x - 2 = 4$ gir $x = 3$. $f(3) = 3$, så tangenten er
$$y = 4(x-3) + 3 = 4x - 9$$
∎

EKSEMPEL *Tangenter gjennom et punkt*

Finn tangentene til $f(x) = x^2$ som går gjennom punktet $(1, -3)$.

Løsning

$-3 = 2a \cdot 1 - a^2$ gir $a^2 - 2a - 3 = 0$, altså $(a - 3)(a + 1) = 0$.

- $a = 3$: $y = 6x - 9$
- $a = -1$: $y = -2x - 1$

Det er to tangenter gjennom punktet. ∎

EKSEMPEL *Normalen til en parabel*

Finn normalen til $f(x) = x^2$ i punktet $(1, 1)$.

Løsning

Normalen har stigningstallet $-\frac{1}{2}$:

$$y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

∎

5.61 Finn tangenten.

a) Til $f(x) = x^2 + 3x$ i $x = 1$.

b) Til $f(x) = x^3 - x$ i $x = -1$.

c) Til $f(x) = \sqrt{x}$ i $x = 4$.

5.62 Finn tangenten.

a) Til $f(x) = e^{2x}$ i $x = 0$.

b) Til $f(x) = \ln x$ i $x = e$.

c) Til $f(x) = xe^x$ i $x = 0$.

5.63 Finn tangenten til $f(x) = x^2 - 4x$ som

a) er parallell med $y = 2x - 7$,

b) er vannrett.

5.64 Finn tangentene til $f(x) = x^3$ med stigningstall 12.

5.65 Finn tangenten til $f(x) = \ln x$ som er parallell med $y = \frac{1}{2}x$.

5.66 Finn tangentene til $f(x) = x^2$ som går gjennom punktet $(2, 3)$.

5.67 Finn tangentene til $f(x) = x^2 + 1$ som går gjennom origo.

5.68 Finn normalen.

a) Til $f(x) = x^2$ i $x = 1$.

b) Til $f(x) = x^3$ i $x = 1$.

c) Til $f(x) = e^x$ i $x = 0$.

5.69 Finn en retningsvektor for tangenten og for normalen til $f(x) = x^2 - 2x$ i $x = 3$.

5.70 Linja $y = 3x + b$ er tangent til $f(x) = x^2 + x$. Finn b.

5.71 Finn feilen. Ida skal finne tangenten til $f(x) = x^2$ gjennom $(1, -3)$ og skriver $f'(1) = 2$, så $y = 2(x - 1) - 3 = 2x - 5$.

5.72 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return x**3

def fd(x):
    return 3*x**2

a = 2
print(fd(a), f(a) - fd(a)*a)
```

Hva betyr tallene?

5.73 Tangentene til $f(x) = x^2$ i $x = a$ og $x = -a$ står vinkelrett på hverandre. Finn $a > 0$.

5.74 Vis at tangenten til $f(x) = \frac{1}{x}$ i $x = a$ skjærer x-aksen i $x = 2a$.

5.75 Linja $y = x + k$ er tangent til $f(x) = e^x$. Finn k.

5.5.1 Analyse av rasjonale funksjoner, eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner

EKSEMPEL *Drøft en rasjonal funksjon*

Drøft $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$.

Løsning

Definisjonsmengde: $x \neq 1$. *Nullpunkt:* $x = 0$.

Asymptoter: Vertikal $x = 1$. Siden $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$, er $y = x + 1$ en skrå asymptote.

Monotoni: Brøkregelen gir

$$f'(x) = \frac{2x(x - 1) - x^2}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

Nevneren er positiv, så fortegnet bestemmes av $x(x - 2)$:

	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Toppunkt $(0, 0)$ og bunnpunkt $(2, 4)$.

Krumning: $f''(x) = \frac{2}{(x - 1)^3}$. Grafen vender den hule siden ned for $x < 1$ og opp for $x > 1$. Det er ikke noe vendepunkt, fordi $x = 1$ ikke er med i definisjonsmengden. ∎

EKSEMPEL *Drøft en eksponentialfunksjon*

Drøft $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Løsning

Definisjonsmengde: alle x. *Nullpunkt:* $x = 0$. Ellers er $f(x) > 0$.

Asymptote: $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} \to 0$ når $x \to \infty$, så $y = 0$ er en horisontal asymptote mot høyre. Når $x \to -\infty$, går $f(x) \to \infty$.

Monotoni: $f'(x) = e^{-x}x(2-x)$ gir bunnpunkt $(0, 0)$ og toppunkt $\left(2, 4e^{-2}\right) \approx (2; 0{,}54)$.

Vendepunkter: $x^2 - 4x + 2 = 0$ gir $x = 2 \pm \sqrt{2}$. f'' skifter fortegn i begge, så det er to vendepunkter. ∎

EKSEMPEL *Drøft en logaritmefunksjon*

Drøft $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Løsning

Definisjonsmengde: $x > 0$. *Nullpunkt:* $\ln x = 0$ gir $x = 1$.

Asymptoter: $f(x) \to -\infty$ når $x \to 0^+$, så $x = 0$ er en vertikal asymptote. $f(x) \to 0$ når $x \to \infty$, fordi x vinner over $\ln x$. $y = 0$ er en horisontal asymptote.

Monotoni: $f'(x) > 0$ når $x < e$ og $f'(x) < 0$ når $x > e$. Toppunkt $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.

Vendepunkt: $2\ln x - 3 = 0$ gir $x = e^{3/2}$. ∎

5.76 Drøft $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$: Finn topp- og bunnpunkter og vendepunkt, og skisser grafen.

5.77 Drøft $f(x) = x^4 - 2x^2$: nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter.

5.78 Funksjonen $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$ er gitt.

a) Finn nullpunktet og asymptotene.

b) Vis at f er voksende i hver del av definisjonsmengden.

5.79 Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ er gitt.

a) Finn asymptotene.

b) Finn topp- og bunnpunktene.

5.80 Funksjonen $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ er gitt.

a) Finn toppunktet og asymptoten.

b) Finn vendepunktene. Bruk at $f''(x) = \dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$.

5.81 Drøft $f(x) = xe^{-x}$: nullpunkt, asymptote, toppunkt og vendepunkt.

5.82 Funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$ er gitt.

a) Finn toppunktet og asymptoten.

b) Vis at $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, og finn vendepunktene.

5.83 Drøft $f(x) = x - \ln x$: definisjonsmengde, asymptote, bunnpunkt og krumning.

5.84 Drøft $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$: nullpunkt, asymptoter og toppunkt.

5.85 Funksjonen $f(x) = \ln\left(x^2 + 4\right)$ er gitt. Finn bunnpunktet og vendepunktene.

5.86 Hvor mange løsninger har likningen $x^3 - 3x^2 = k$ for

a) $k = 1$

b) $k = -4$

c) $k = -2$

5.87 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import exp

def f(x):
    return x * exp(-x)

for x in [0, 1, 2]:
    print(x, round(f(x), 3))
```

5.88 Finn feilen. Nora drøfter $f(x) = \dfrac{1}{x}$ og sier at grafen har et vendepunkt i $x = 0$, fordi $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ skifter fortegn der.

5.89 Funksjonen $f(x) = x^2e^{-x}$ er gitt. Bruk drøftingen til å forklare at $f(x) \leqslant 4e^{-2}$ for alle $x \geqslant 0$.

5.90 Lag en funksjon som har vertikal asymptote $x = 2$, horisontal asymptote $y = 1$ og nullpunkt $x = 0$.

5.6.1 Newtons metode

EKSEMPEL *Kvadratroten av 2*

Bruk Newtons metode med $f(x) = x^2 - 2$ og $x_0 = 1$ til å finne en tilnærmet verdi for $\sqrt{2}$. Regn ut to steg.

Løsning

$$x_1 = 1 - \frac{1-2}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = 1{,}5 - \frac{2{,}25-2}{3} = 1{,}5 - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} \approx 1{,}4167$$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, så etter bare to steg har vi to riktige desimaler. ∎

5.91 Skriv opp formelen for Newtons metode for funksjonen.

a) $f(x) = x^2 - 7$

b) $f(x) = x^3 + x - 3$

c) $f(x) = e^x - 2$

5.92 Regn ut x_1.

a) $f(x) = x^2 - 6$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = x^2 - 8$, $x_0 = 3$

c) $f(x) = x^3 - 10$, $x_0 = 2$

5.93 Regn ut x_1 og x_2 for $f(x) = x^2 - 5$ med $x_0 = 2$. Skriv svarene som brøker.

5.94 Likningen $x^3 + x - 1 = 0$ er gitt.

a) Vis at den har en løsning mellom 0 og 1.

b) Regn ut x_1 med $x_0 = 1$.

c) Regn ut x_1 med $x_0 = 0$.

5.95 Tangenten til f i $x_0 = 3$ er $y = 2x - 5$. Finn x_1 i Newtons metode.

5.96 Vis at Newtons metode for $f(x) = x^3 - a$ gir

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}$$

5.97 Bruk Newtons metode med $x_0 = 0$ til å finne x_1 for likningen $e^x = 2 - x$.

5.98 Bruk Newtons metode med $x_0 = 1$ til å finne x_1 for likningen $\ln x = 2 - x$.

5.99 Forklar hvorfor Newtons metode ikke virker for $f(x) = x^2 - 4x + 5$ med $x_0 = 2$.

5.100 Likningen $x^2 = 2$ har to løsninger. Hvilken finner Newtons metode med

a) $x_0 = 1$

b) $x_0 = -1$

5.101 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return x**2 - 9

def fd(x):
    return 2*x

x = 5
for n in range(2):
    x = x - f(x) / fd(x)
    print(x)
```

5.102 Endre programmet i forrige oppgave slik at det finner løsningen av $x^3 = 20$.

5.103 Finn feilen. Sara regner ut x_1 for $f(x) = x^2 - 3$ med $x_0 = 2$ og skriver $x_1 = 2 - \frac{4}{1} = -2$.

5.104 Bruk Newtons metode på $f(x) = x^2$ med $x_0 = 1$. Vis at $x_n = \frac{1}{2^n}$. Hva skjer?

5.105 Forklar med en figur hvordan Newtons metode finner x_1 fra x_0.

5.7.1 L'Hôpitals regel

EKSEMPEL *Grenseverdier av typen null delt på null*

Finn grenseverdiene.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

Løsning

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$. Nå er gjetningen fra kapittel 2 bevist.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{2x}{1} = 4$, det samme som vi får ved å faktorisere.

c) $\lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1$

■

EKSEMPEL *Bruk regelen flere ganger*

Vis at $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

Løsning

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Slik kan vi vise at e^x vinner over alle potenser av x.

■

EKSEMPEL *Skriv om før du bruker regelen*

Finn $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

Løsning

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

■

5.106 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

5.107 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

5.108 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$

c) $\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

5.109 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{10}}{e^x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

5.110 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + x}{x^2 - 5}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

5.111 Finn grenseverdien. Bruk regelen to ganger.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$

5.112 Finn grenseverdien. Skriv om til en brøk først.

a) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

b) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$

c) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

5.113 Finn feilen. Tor skriver

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$$

5.114 Finn feilen. Emma bruker brøkregelen på $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

5.115 Vis at $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

5.116 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import log

for x in [1.1, 1.01, 1.001]:
    print(round(log(x) / (x - 1), 4))
```

Hvilken grenseverdi nærmer verdiene seg?

5.117 Finn $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

5.118 Finn a slik at $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - 1}{x} = 5$.

5.119 Forklar hvorfor L'Hôpitals regel virker, med tangentene til teller og nevner.

5.120 Vis at $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n = e^2$.

Fasit

5.1.1 Monotoni

5.1

a) Avtakende i $\langle \leftarrow, 3]$, voksende i $[3, \rightarrow\rangle$

b) Voksende i $\langle \leftarrow, 1]$, avtakende i $[1, \rightarrow\rangle$

c) Voksende overalt

5.2

a) $f'(x) = 3x(x-2)$: voksende i $\langle \leftarrow, 0]$ og $[2, \rightarrow\rangle$, avtakende i $[0, 2]$

b) $f'(x) = 3(x+3)(x-3)$: voksende i $\langle \leftarrow, -3]$ og $[3, \rightarrow\rangle$, avtakende i $[-3, 3]$

c) $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$: voksende i $\langle \leftarrow, -2]$ og $[1, \rightarrow\rangle$, avtakende i $[-2, 1]$

5.3

a) Voksende i $\langle \leftarrow, -1]$ og $[5, \rightarrow\rangle$, avtakende i $[-1, 5]$

b) f' skifter ikke fortegn. Er $f'(2) = 0$, er det et terrassepunkt.

5.4

a) $f'(x) = 4x(x+2)(x-2)$: voksende i $[-2, 0]$ og $[2, \rightarrow\rangle$

b) $f'(x) = 4x^2(x-3)$: voksende i $[3, \rightarrow\rangle$

5.5

a) $f'(x) = e^x - 2$: avtakende i $\langle \leftarrow, \ln 2]$, voksende i $[\ln 2, \rightarrow\rangle$

b) $f'(x) = e^{2x}(1+2x)$: avtakende i $\langle \leftarrow, -\frac{1}{2}]$, voksende i $[-\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$

c) $f'(x) = e^x(x-2)$: avtakende i $\langle \leftarrow, 2]$, voksende i $[2, \rightarrow\rangle$

5.6

a) $f'(x) = \dfrac{x-2}{x}$: avtakende i $\langle 0, 2]$, voksende i $[2, \rightarrow\rangle$

b) $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$: avtakende i $\langle 0, 1]$, voksende i $[1, \rightarrow\rangle$

c) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$: voksende i $\langle 0, e]$, avtakende i $[e, \rightarrow\rangle$

5.7

a) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$: voksende i $[-1, 1]$, avtakende i $\langle \leftarrow, -1]$ og $[1, \rightarrow\rangle$

b) $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$: voksende i $\langle \leftarrow, 0]$ og $[4, \rightarrow\rangle$, avtakende i $[0, 2\rangle$ og $\langle 2, 4]$

5.8

a) $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

b) $f'(x) = 1 + e^x > 0$

c) $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

5.9

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3 \geqslant 0$ for alle x når diskriminanten $4a^2 - 36 \leqslant 0$, altså $-3 \leqslant a \leqslant 3$.

5.10

Monotoni avgjøres av fortegnet til $f'(x)$, ikke $f(x)$. $f'(x) = 2x$, så f er avtakende for $x \leqslant 0$ og voksende for $x \geqslant 0$.

5.11

Mange svar er mulige, for eksempel

a) x^3

b) $(x-1)^2$

c) $\ln x$ eller $\sqrt{x}$

5.12

```
-1 +
1 -
5 +
```

5.13

La $g(x) = x - 1 - \ln x$. Da er $g(1) = 0$ og $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} > 0$ for $x > 1$. g er voksende, så $g(x) > 0$ for $x > 1$.

5.14

$f'(x) = 100x^{99} - 100 = 100(x^{99} - 1)$.

$x^{99} > 1$ når $x > 1$. Avtakende i $\langle \leftarrow, 1]$, voksende i $[1, \rightarrow\rangle$.

5.15

$f'(x) = e^{-x}x(2-x)$: voksende i $[0, 2]$.

5.2.1 Topp- og bunnpunkter

5.16

a) Bunnpunkt $(2, -3)$

b) Toppunkt $(3, 9)$

c) Bunnpunkt $(-2, -5)$

5.17

a) Toppunkt $(-1, 2)$, bunnpunkt $(1, -2)$

b) Toppunkt $(1, 4)$, bunnpunkt $(3, 0)$

c) Bunnpunkt $(-2, -15)$, toppunkt $(2, 17)$

5.18

a) Bunnpunkter $(-1, -1)$ og $(1, -1)$, toppunkt $(0, 0)$

b) $f'(x) = 3(x+1)^2$: terrassepunkt $(-1, -1)$

c) $f'(x) = 12x^2(x-1)$: terrassepunkt $(0, 0)$, bunnpunkt $(1, -1)$

5.19

a) Toppunkt $\left(1, e^{-1}\right)$

b) Toppunkt $\left(-2, 4e^{-2}\right)$, bunnpunkt $(0, 0)$

c) Bunnpunkt $(0, 1)$

5.20

a) Bunnpunkt $\left(e^{-1}, -e^{-1}\right)$

b) Bunnpunkt $(1, 1)$

c) Toppunkt $\left(e, e^{-1}\right)$

5.21

a) Største $f(4) = 8$, minste $f(1) = -1$

b) Største $f(-2) = 16$, minste $f(2) = -16$

c) Største $f(5) = 65$, minste $f(2) = -16$

5.22

$f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1}$ og $f(3) = 3e^{-3}$. Største verdi e^{-1}, minste verdi 0.

5.23

$f'(x) = \dfrac{4\left(4 - x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$. Bunnpunkt $(-2, -1)$, toppunkt $(2, 1)$.

5.24

$f'(2) = 12 + 4a = 0$ gir $a = -3$. $f(2) = 8 - 12 + b = 1$ gir $b = 5$.

5.25

$f'(x) = 3x^2$ skifter ikke fortegn. $(0, 0)$ er et terrassepunkt.

5.26

-9, som er bunnverdien $f(3)$.

5.27

$f'(x) = 50x^{49} - 50 = 0$ gir $x = 1$. Bunnpunkt $(1, -49)$.

5.28

Bunnpunktet er i $x = \frac{k}{2}$, med verdien $9 - \frac{k^2}{4} = 0$. $k = 6$ eller $k = -6$.

5.29

Grafen stiger fram til $(1, 3)$, synker til $(4, -1)$ og stiger igjen.

5.30

$f'(x)$ er en andregradsfunksjon. Den har enten to nullpunkter der den skifter fortegn (to ekstremalpunkter), ett dobbelt nullpunkt uten fortegnsskifte (terrassepunkt), eller ingen nullpunkter.

5.2.2 Optimering

5.31

$P(x) = x(20 - x)$, $P'(x) = 20 - 2x = 0$ gir $x = 10$. Tallene er 10 og 10.

5.32

$A(x) = x(30 - x)$, maksimum i $x = 15$. Arealet er 225 cm².

5.33

$A(x) = x(80 - 2x)$, $A'(x) = 80 - 4x = 0$ gir $x = 20$. Arealet er $20 \cdot 40 = 800$ m².

5.34

$O(x) = 2x + \frac{200}{x}$, $O'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = 0$ gir $x = 10$. Omkretsen er 40 cm.

5.35

$V(x) = x(12 - 2x)^2$, $V'(x) = (12 - 2x)(12 - 6x) = 0$ gir $x = 2$. Volumet er $2 \cdot 8^2 = 128$ cm³.

5.36

$V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$, $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x - 20)(x - 2)$. Med $0 < x < 5$ er $x = 2$ cm. Volumet er $2 \cdot 12 \cdot 6 = 144$ cm³.

5.37

$R(x) = (400 - 20x)(50 + 5x)$, $R'(x) = -20(50 + 5x) + 5(400 - 20x) = 1000 - 200x = 0$ gir $x = 5$. Prisen er 300 kroner, og inntekten $300 \cdot 75 = 22\,500$ kroner.

5.38

$G(x) = x + 40 + \frac{1600}{x}$, $G'(x) = 1 - \frac{1600}{x^2} = 0$ gir $x = 40$. Kostnaden per enhet er 120 kroner.

5.39

$d^2 = x^2 + (2x + 5)^2 = 5x^2 + 20x + 25$, minimum i $x = -2$. Punktet er $(-2, 1)$, med avstand $\sqrt{5}$.

5.40

$K'(t) = 6e^{-t}(1 - t) = 0$ gir $t = 1$.

$K(1) = 6e^{-1} \approx 2{,}2$ mg/L.

5.41

$h = \frac{27}{r^2}$, $A(r) = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}$. $A'(r) = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2} = 0$ gir $r^3 = 27$, $r = 3$ cm.

5.42

Omkretsen er $2r + 2h + \pi r = 4$, så $h = 2 - r - \frac{\pi r}{2}$. $A = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = 4r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$. $A'(r) = 4 - 4r - \pi r = 0$ gir $r = \frac{4}{4 + \pi}$ m.

5.43

```
10 600
20 800
30 600
```

$x = 20$

5.44

Han må først skrive A som en funksjon av én variabel: $y = 10 - x$ og $A(x) = x(10 - x)$. Da gir $A'(x) = 10 - 2x = 0$ at $x = 5$, og arealet er 25.

5.45

$S(x) = x + \frac{36}{x}$, $S'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = 0$ gir $x = 6$. Summen er 12.

5.3.1 Krumning og vendepunkter

5.46

a) $20x^3$

b) $6x - 8$

c) e^{-x}

d) $\frac{2}{x^3}$

5.47

a) $e^x(x + 2)$

b) $-\frac{2}{x^2}$

c) $-\frac{1}{4}x^{-3/2}$

d) $9900x^{98}$

5.48

a) $f''(x) = 6x - 6$: vendepunkt $(1, 0)$

b) $f''(x) = 6x + 12$: vendepunkt $(-2, 16)$

c) $f''(x) = -6x$: vendepunkt $(0, 0)$

5.49

a) $f''(x) = 12(x^2 - 1)$: vendepunkter $(-1, -5)$ og $(1, -5)$. Hul side ned i $[-1, 1]$, opp ellers.

b) $f''(x) = 12x(x - 2)$: vendepunkter $(0, 0)$ og $(2, -16)$. Hul side ned i $[0, 2]$, opp ellers.

5.50

a) $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$: $\left(2, 2e^{-2}\right)$

b) $f''(x) = e^x(x + 2)$: $\left(-2, -2e^{-2}\right)$

c) $f''(x) = 2\ln x + 3$: $x = e^{-3/2}$, punktet $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$

5.51

a) $f''(x) = 6x$: $f''(-2) < 0$ gir toppunkt $(-2, 16)$, $f''(2) > 0$ gir bunnpunkt $(2, -16)$.

b) $f'(x) = 3(x - 4)(x + 2)$ og $f''(x) = 6x - 6$: toppunkt $(-2, 28)$, bunnpunkt $(4, -80)$.

5.52

a) $f'(x) = 4x^3$ og $f''(x) = 12x^2$.

b) Et bunnpunkt.
Andrederiverttesten gir ikke svar, men f' skifter fra $-$ til $+$.

5.53

a) $v(t) = 6t^2 - 18t + 12$ og $a(t) = 12t - 18$

b) $v(t) = 6(t - 1)(t - 2) = 0$: $t = 1$ og $t = 2$

c) $t = 1{,}5$

5.54

a) $N''(t) = 120 - 12t = 0$ gir $t = 10$.

b) $N'(10) = 120 \cdot 10 - 6 \cdot 100 = 600$ per dag.

5.55

$f''(x) = 6x + 2a = 0$ i $x = 2$ gir $a = -6$.

5.56

$f''(1) > 0$ betyr at grafen vender den hule siden opp, altså et bunnpunkt.

5.57

a) For eksempel e^x (hul side opp)

b) For eksempel $\ln x$ (hul side ned)

c) For eksempel $x^3 + x$

5.58

```
-2 True
0 False
2 True
```

5.59

$f''(x) = e^x + 2 > 0$ for alle x.

5.60

$1 + 15e^{-0{,}5\,t} = 2$ gir $e^{-0{,}5\,t} = \frac{1}{15}$, så $t = 2\ln 15$.

5.4.1 Tangenter

5.61

a) $y = 5x - 1$

b) $y = 2x + 2$

c) $y = \frac{1}{4}x + 1$

5.62

a) $y = 2x + 1$

b) $y = \frac{x}{e}$

c) $y = x$

5.63

a) $2x - 4 = 2$ gir $x = 3$, $f(3) = -3$: $y = 2x - 9$

b) $x = 2$: $y = -4$

5.64

$3x^2 = 12$ gir $x = \pm 2$. Tangentene er $y = 12x - 16$ og $y = 12x + 16$.

5.65

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ gir $x = 2$: $y = \frac{1}{2}x - 1 + \ln 2$.

5.66

$y = 2ax - a^2$ gjennom $(2, 3)$: $a^2 - 4a + 3 = 0$, $a = 1$ eller $a = 3$. Tangentene er $y = 2x - 1$ og $y = 6x - 9$.

5.67

Tangenten i a: $y = 2a(x - a) + a^2 + 1$. Gjennom origo: $a^2 = 1$. Tangentene er $y = 2x$ og $y = -2x$.

5.68

a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

c) $y = -x + 1$

5.69

$f'(3) = 4$. Tangent: $[1, 4]$. Normal: $[4, -1]$ (eller $[1, -\frac{1}{4}]$).

5.70

$2x + 1 = 3$ gir $x = 1$, $f(1) = 2$. Tangenten er $y = 3x - 1$, så $b = -1$.

5.71

$(1, -3)$ ligger ikke på grafen, så den kan ikke være tangeringspunktet. Riktige tangenter er $y = 6x - 9$ og $y = -2x - 1$.

5.72

12 -16. Tangenten i $x = 2$ er $y = 12x - 16$.

5.73

$2a \cdot (-2a) = -1$ gir $a^2 = \frac{1}{4}$, så $a = \frac{1}{2}$.

5.74

Tangenten er $y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a}$.

$y = 0$ gir $x - a = a$, altså $x = 2a$.

5.75

$e^x = 1$ gir $x = 0$, og tangenten er $y = x + 1$. $k = 1$.

5.5.1 Analyse av rasjonale funksjoner, eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner

5.76

$f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$: toppunkt $(-1, 7)$, bunnpunkt $(3, -25)$. $f''(x) = 6x - 6$: vendepunkt $(1, -9)$.

5.77

Nullpunkter $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{2}$. Toppunkt $(0, 0)$, bunnpunkter $(\pm 1, -1)$. Vendepunkter i $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, med $y = -\frac{5}{9}$.

5.78

a) Nullpunkt $x = 2$. Asymptoter $x = -1$ og $y = 2$.

b) $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^2} > 0$

5.79

a) $x = 0$ og den skrå asymptoten $y = x$

b) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$: toppunkt $(-2, -4)$, bunnpunkt $(2, 4)$

5.80

a) Toppunkt $(0, 1)$, asymptote $y = 0$

b) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, med $y = \frac{3}{4}$

5.81

Nullpunkt $x = 0$. Asymptote $y = 0$ når $x \to \infty$. Toppunkt $\left(1, e^{-1}\right)$. Vendepunkt $\left(2, 2e^{-2}\right)$.

5.82

a) Toppunkt $(0, 1)$, asymptote $y = 0$

b) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Vendepunkter i $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, med $y = e^{-1/2}$.

5.83

$x > 0$. $f(x) \to \infty$ når $x \to 0^+$, så $x = 0$ er en asymptote. Bunnpunkt $(1, 1)$.

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$: hul side opp overalt.

5.84

Nullpunkt $x = 1$. Asymptoter $x = 0$ og $y = 0$. Toppunkt $\left(e, e^{-1}\right)$.

5.85

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$: bunnpunkt $(0, \ln 4)$.

$f''(x) = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2+4)^2}$: vendepunkter $(\pm 2, \ln 8)$.

5.86

Toppunkt $(0, 0)$ og bunnpunkt $(2, -4)$.

a) 1

b) 2

c) 3

5.87

```
0 0.0
1 0.368
2 0.271
```

5.88

$x = 0$ er ikke med i definisjonsmengden. Da er det ikke noe vendepunkt der, men en vertikal asymptote.

5.89

For $x \geqslant 0$ har f bunnpunkt i $(0, 0)$ og toppunkt i $\left(2, 4e^{-2}\right)$, og $f(x) \to 0$ når $x \to \infty$. Den største verdien er $4e^{-2}$.

5.90

For eksempel $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

5.6.1 Newtons metode

5.91

a) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2x_n}$

b) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 3}{3x_n^2 + 1}$

c) $x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 2}{e^{x_n}}$

5.92

a) $2 - \frac{-2}{4} = \frac{5}{2}$

b) $3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$

c) $2 - \frac{-2}{12} = \frac{13}{6}$

5.93

$x_1 = \frac{9}{4}$ og $x_2 = \frac{9}{4} - \frac{\frac{81}{16} - 5}{\frac{9}{2}} = \frac{9}{4} - \frac{1}{72} = \frac{161}{72} \approx 2{,}2361$

5.94

a) $f(0) = -1 < 0$ og $f(1) = 1 > 0$, og f er kontinuerlig.

b) $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

c) $0 - \frac{-1}{1} = 1$

5.95

$2x - 5 = 0$ gir $x_1 = \frac{5}{2}$.

5.96

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - x_n^3 + a}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}$

5.97

$f(x) = e^x + x - 2$, $f'(x) = e^x + 1$. $x_1 = 0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$.

5.98

$f(x) = \ln x + x - 2$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$. $x_1 = 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2}$.

5.99

$f'(2) = 0$, så vi må dele på 0. Dessuten har $f(x) = (x-2)^2 + 1$ ingen nullpunkter.

5.100

a) $\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{2}$

5.101

```
3.4
3.023529411764706
```

Verdiene nærmer seg 3.

5.102

Bytt `x**2 - 9` med `x**3 - 20` og `2*x` med `3*x**2`. Øk gjerne antall steg.

5.103

Hun har byttet om f og f'. Riktig er $x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

5.104

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}$. Verdiene halveres hver gang og nærmer seg 0, men saktere enn vanlig fordi $x = 0$ er et dobbelt nullpunkt.

5.105

Tegn tangenten til grafen i $(x_0, f(x_0))$. Der tangenten krysser x-aksen, er x_1.

5.7.1 L'Hôpitals regel

5.106

a) 8

b) 4

c) $\frac{12}{4} = 3$

5.107

a) 3

b) $\frac{1}{2}$

c) 2

5.108

a) $\frac{1}{2}$

b) 3

c) $\frac{1}{e}$

5.109

a) 0

b) 0 (ti ganger L'Hôpital)

c) 0

5.110

a) 3

b) ∞

5.111

a) $\frac{1}{2}$

b) 2

5.112

a) 0

b) 0

c) $\lim \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim \frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim(-2\sqrt{x}) = 0$

5.113

Uttrykket er ikke $\frac{0}{0}$. Innsetting gir grenseverdien 2.

5.114

L'Hôpitals regel deriverer teller og nevner hver for seg: $\lim \frac{e^x}{1} = 1$.

5.115

$\lim \frac{a^x \ln a}{1} = \ln a$

5.116

```
0.9531
0.995
0.9995
```

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

5.117

$\lim \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$

5.118

$\lim \frac{ae^{ax}}{1} = a = 5$

5.119

Er $f(a) = g(a) = 0$, er $f(x) \approx f'(a)(x-a)$ og $g(x) \approx g'(a)(x-a)$ nær a.

Forholdet er da omtrent $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

5.120

$n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{\ln(1+2t)}{t}$ med $t = \frac{1}{n} \to 0$. L'Hôpital gir $\lim \frac{2/(1+2t)}{1} = 2$. Da går uttrykket mot e^2.