4 Derivasjon av sammensatte funksjoner

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK R1

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

KJERNEREGELEN

Kjerneregelen

$$(g(u))' = g'(u) \cdot u'$$

Potens med kjerne

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

Rot med kjerne

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

e opphøyd i en kjerne

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

Spesialtilfelle

$$\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$$

ln av en kjerne

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Andre grunntall

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

PRODUKT OG BRØK

Produktregelen

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Brøkregelen

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Konstant teller

$$\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k \cdot v'}{v^2}$$

- Velg den enkleste regelen: forkort først, kjerneregel ved konstant teller, produktregel ved produkt, brøkregel ved brøk.

4.1.1 Kjerneregelen

EKSEMPEL *Deriver med kjerneregelen*

Deriver.

a) $(3x+1)^5$

b) $\left(x^2-4\right)^{10}$

c) $(5-2x)^3$

Løsning

a) $u = 3x+1$ og $u' = 3$: $5(3x+1)^4 \cdot 3 = 15(3x+1)^4$.

b) $u = x^2-4$ og $u' = 2x$: $10\left(x^2-4\right)^9 \cdot 2x = 20x\left(x^2-4\right)^9$.

c) $u = 5-2x$ og $u' = -2$: $3(5-2x)^2 \cdot (-2) = -6(5-2x)^2$.

■

EKSEMPEL *Røtter og brøker med kjerne*

Deriver.

a) $\sqrt{x^2+1}$

b) $\dfrac{1}{(2x-1)^3}$

c) $\sqrt{4-x}$

Løsning

a) $\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $\left((2x-1)^{-3}\right)' = -3(2x-1)^{-4} \cdot 2 = -\dfrac{6}{(2x-1)^4}$

c) $\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$

■

EKSEMPEL *Tangent til en rotfunksjon*

Finn tangenten til $f(x) = \sqrt{2x+1}$ i punktet der $x = 4$.

Løsning

$f(4) = \sqrt{9} = 3$. $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, så $f'(4) = \dfrac{1}{3}$.

$$y = \frac{1}{3}(x-4)+3 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

■

EKSEMPEL *Ballongen*

Radiusen til en ballong er $r(t) = 3t$ cm etter t sekunder, og overflaten er $A = 4\pi r^2$. Hvor fort vokser overflaten etter 2 sekunder?

Løsning

$A'(t) = 8\pi r \cdot r'(t) = 8\pi \cdot 3t \cdot 3 = 72\pi t$. Etter 2 sekunder vokser overflaten med $144\pi \approx 452$ cm² per sekund.

Kontroll: $A = 4\pi(3t)^2 = 36\pi t^2$ gir også $A' = 72\pi t$.

■

4.1 Finn kjernen u og den ytre funksjonen $g(u)$.

a) $(2x+7)^4$

b) $\sqrt{x^2-5}$

c) $\left(x^3+x\right)^{-2}$

d) $\dfrac{1}{4x-3}$

4.2 Deriver.

a) $(x+5)^2$

b) $(3x-2)^4$

c) $(1-4x)^3$

d) $(0{,}5\,x+1)^6$

4.3 Deriver. Eksponentene er store, så ikke gang ut.

a) $(x+1)^{100}$

b) $(2x-3)^{50}$

c) $\left(x^2+1\right)^{20}$

d) $(5-x)^{99}$

4.4 Deriver.

a) $\left(x^2+3\right)^3$

b) $\left(x^2-x\right)^2$

c) $\left(2x^3+1\right)^5$

d) $\left(x^4-2x\right)^3$

4.5 Deriver.

a) $\sqrt{2x+3}$

b) $\sqrt{1-x^2}$

c) $\sqrt{x^3+1}$

d) $3\sqrt{6x}$

4.6 Deriver.

a) $\dfrac{1}{x+4}$

b) $\dfrac{1}{(3x+1)^2}$

c) $\dfrac{6}{x^2+2}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

4.7 Funksjonen $f(x) = (2x-1)^3$ er gitt.

a) Finn $f'(x)$.

b) Finn $f'(1)$ og $f'(0)$.

c) Finn tangenten i punktet der $x = 1$.

4.8 Finn tangenten til $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ i punktet der $x = 4$.

4.9 Hvor har grafen vannrett tangent?

a) $f(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$

b) $g(x) = (x-3)^4$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

4.10 Kontroller kjerneregelen ved å gange ut og derivere.

a) $(x+3)^2$

b) $(2x-1)^3$

4.11 Sidekanten i et kvadrat er $s(t) = 2t + 3$ cm etter t sekunder. Arealet er $A = s^2$.

a) Finn $A'(t)$ med kjerneregelen.

b) Hvor fort vokser arealet etter 2 sekunder?

4.12 Radiusen til en sirkelformet oljeflekk er $r(t) = \sqrt{t}$ meter etter t minutter. Arealet er $A = \pi r^2$.

a) Finn $A'(t)$.

b) Forklar svaret ved å finne $A(t)$ direkte.

4.13 Finn feilene, og deriver riktig.

a) $\left((4x+1)^3\right)' = 3(4x+1)^2$

b) $\left(\left(x^2+5\right)^2\right)' = 2(2x)$

c) $\left(\sqrt{3x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{3x}}$

4.14 Hva blir utskriften?

Python

```
def fd(x):
    return 4*(2*x + 1)

for x in [0, 1, 2]:
    print(fd(x))
```

Hvilken funksjon kan `fd` være den deriverte av?

4.15 Funksjonen $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^{10}$ er gitt. Finn

a) $f'(1)$

b) $f'(0)$

c) $f'(2)$, skrevet med en potens av 3

4.16 Finn $f'(x)$ når $f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2$, på to måter: med kjerneregelen og ved å gange ut først.

4.1.2 Kjerneregelen med e^x og $\ln x$

EKSEMPEL *Deriver e-funksjoner*

Deriver.

a) e^{3x}

b) e^{x^2}

c) $5e^{-0{,}2\,x}$

Løsning

a) $3e^{3x}$

b) $e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$

c) $5e^{-0{,}2\,x} \cdot (-0{,}2) = -e^{-0{,}2\,x}$

■

EKSEMPEL *Kaffen som avkjøles*

Temperaturen i kaffen er $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}1\,t}$. Finn $T'(t)$ og $T'(0)$, og forklar hva svaret betyr.

Løsning

$T'(t) = 70e^{-0{,}1\,t} \cdot (-0{,}1) = -7e^{-0{,}1\,t}$, så $T'(0) = -7$.

Når kaffen skjenkes, synker temperaturen med 7 grader per minutt. Siden $e^{-0{,}1\,t}$ minker, avtar også avkjølingen etter hvert.

■

EKSEMPEL *Deriver ln-funksjoner*

Deriver.

a) $\ln\left(x^2+1\right)$

b) $\ln(3x)$

c) $\ln(5-2x)$

Løsning

a) $\dfrac{2x}{x^2+1}$

b) $\dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$, som vi også fant med logaritmesetningene i kapittel 3.

c) $\dfrac{-2}{5-2x}$

■

EKSEMPEL *Andre grunntall med kjerne*

Deriver $f(x) = 2^{3x}$ og $g(x) = 10^{x^2}$.

Løsning

$f'(x) = 2^{3x} \ln 2 \cdot 3 = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$

$g'(x) = 10^{x^2} \ln 10 \cdot 2x = 2x \ln 10 \cdot 10^{x^2}$

■

4.17 Deriver.

a) e^{5x}

b) e^{-2x}

c) $e^{x/2}$

d) $4e^{3x}$

e) e^{2x+1}

4.18 Deriver.

a) e^{x^2}

b) e^{-x^2}

c) e^{x^3+x}

d) $e^{\sqrt{x}}$

4.19 Deriver.

a) $\ln(4x+1)$

b) $\ln\left(x^2+2\right)$

c) $\ln(1-x)$

d) $\ln(e^x+1)$

4.20 Deriver. Bruk gjerne logaritmesetningene først.

a) $\ln\left((2x+1)^3\right)$

b) $\ln\sqrt{x^2+1}$

c) $\ln\left(x^{100}\right)$

4.21 Deriver.

a) 2^{5x}

b) 3^{x^2}

c) 10^{-x}

d) $5\cdot 2^{0{,}1\,x}$

4.22 Vis at $(a^x)' = a^x \ln a$ ved å skrive $a^x = e^{x\ln a}$.

4.23 Finn tangenten.

a) Til $f(x) = e^{3x}$ i $x = 0$.

b) Til $g(x) = \ln(x^2)$ i $x = 1$.

c) Til $h(x) = e^{x-2}$ i $x = 2$.

4.24 Hvor har grafen vannrett tangent?

a) $f(x) = e^{x^2-4x}$

b) $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

c) $h(x) = e^{2x} - 4x$

4.25 Et radioaktivt stoff har massen $m(t) = 80e^{-\,0{,}05\,t}$ gram etter t år.

a) Finn $m'(t)$.

b) Finn $m'(0)$ og forklar hva tallet betyr.

c) Vis at $m'(t) = -\,0{,}05\cdot m(t)$.

4.26 Et legemiddel har konsentrasjonen $K(t) = 12\left(e^{-\,0{,}2\,t} - e^{-t}\right)$ mg/L etter t timer.

a) Finn $K'(t)$.

b) Finn $K'(0)$.

4.27 Finn feilene, og deriver riktig.

a) $\left(e^{4x}\right)' = 4xe^{4x-1}$

b) $\left(e^{x^2}\right)' = e^{2x}$

c) $(\ln(3x+2))' = \dfrac{1}{3x+2}$

4.28 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import exp

def m(t):
    return 80*exp(-0.05*t)

for t in [0, 20]:
    fart = -0.05*m(t)
    print(t, round(m(t), 1), round(fart, 1))
```

Hva betyr den siste kolonnen?

4.29 En bestand er $N(t) = \dfrac{200}{1+3e^{-\,0{,}4\,t}}$.

a) Finn $N(0)$.

b) Finn $N'(t)$.

c) Finn $N'(0)$.

4.30 Finn k slik at $f(x) = e^{kx}$ har en tangent med stigningstall 6 i $x = 0$.

4.31 Funksjonen $f(x) = e^{-x}$ er gitt. Tangenten i $x = a$ skjærer x-aksen. Vis at skjæringspunktet alltid er $(a+1, 0)$.

4.2.1 Produktregelen

EKSEMPEL *Deriver produkter*

Deriver.

a) x^2e^x

b) $x\ln x$

c) $(x+1)\left(x^2-2\right)$

Løsning

a) $u = x^2$, $v = e^x$: $2xe^x + x^2e^x = e^x\left(x^2+2x\right)$.

b) $u = x$, $v = \ln x$: $1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

c) $1\cdot\left(x^2-2\right) + (x+1)\cdot 2x = 3x^2 + 2x - 2$. Her kunne vi også ganget ut først.

■

EKSEMPEL *Produkt med kjerne*

Deriver $f(x) = xe^{-x}$, og finn hvor grafen har vannrett tangent.

Løsning

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + x\cdot(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$$

e^{-x} er aldri 0, så $f'(x) = 0$ bare når $x = 1$. Grafen har vannrett tangent i $\left(1, e^{-1}\right)$.

■

EKSEMPEL *Inntekten til butikken*

Prisen på en vare er $p(t) = 50 + 2t$ kroner, og butikken selger $q(t) = 200 - 5t$ varer om dagen, der t er antall uker. Finn ut hvor fort inntekten $R(t) = p(t)\cdot q(t)$ endrer seg når $t = 4$.

Løsning

$$\begin{aligned} R'(t) &= 2(200 - 5t) + (50 + 2t)(-5) \\ &= 150 - 20t \end{aligned}$$

$R'(4) = 70$. Inntekten øker med 70 kroner per uke. Prisøkningen gir mer enn salgsnedgangen tar. ∎

4.32 Deriver.

a) xe^x

b) x^2e^x

c) $x \ln x$

d) $x^3 \ln x$

4.33 Deriver med produktregelen, og kontroller ved å gange ut.

a) $x(x + 4)$

b) $(x + 1)(x - 1)$

c) $x^2(x^3 - 2)$

4.34 Deriver.

a) $\sqrt{x} \cdot e^x$

b) $e^x \ln x$

c) $(2x + 1)e^x$

d) $x^{100}e^x$

4.35 Deriver. Sett felles faktor utenfor parentes.

a) xe^{-x}

b) xe^{3x}

c) x^2e^{-2x}

d) $(x + 1)e^{-x}$

4.36 Deriver.

a) $x(2x + 1)^3$

b) $x\sqrt{x + 4}$

c) $x \ln(x^2)$

d) $x^2(x - 1)^{10}$

4.37 Hvor har grafen vannrett tangent?

a) $f(x) = xe^x$

b) $g(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$

c) $h(x) = x^2e^{-x}$

4.38 Finn tangenten.

a) Til $f(x) = xe^x$ i $x = 0$.

b) Til $g(x) = x \ln x$ i $x = 1$.

c) Til $h(x) = xe^{-x}$ i $x = 2$.

4.39 Prisen på en vare er $p(t) = 100 - 2t$ kroner, og salget er $q(t) = 50 + 4t$ varer per dag, der t er antall uker.

a) Finn $R'(t)$ for inntekten $R(t) = p(t) \cdot q(t)$.

b) Finn $R'(5)$.

c) Når er inntekten størst?

4.40 Konsentrasjonen av et stoff i blodet er $K(t) = 5te^{-0{,}5\,t}$ mg/L etter t timer.

a) Finn $K'(t)$.

b) Når er konsentrasjonen høyest?

4.41 Finn feilene, og deriver riktig.

a) $\left(x^2e^x\right)' = 2xe^x$

b) $(x \ln x)' = \ln x$

c) $\left(xe^{2x}\right)' = e^{2x} + xe^{2x}$

4.42 Forklar produktregelen med et rektangel med sidene u og v som begge vokser.

4.43 Hva blir utskriften?

Python

```
def fd(x):
    return 2*x*(x + 3) + x**2

for x in [0, 1, 2]:
    print(fd(x))
```

Hvilken funksjon er `fd` den deriverte av?

4.44 Finn $f'(1)$ når $f(x) = x^3(x - 1)^{50}$.

4.45 Finn a slik at $f(x) = xe^{ax}$ har vannrett tangent i $x = 4$.

4.46 Bruk produktregelen to ganger til å derivere $x^2e^x \ln x$.

4.3.1 Brøkregelen

EKSEMPEL *Deriver brøker*

Deriver.

a) $\dfrac{2x + 1}{x - 3}$

b) $\dfrac{x}{x^2 + 1}$

Løsning

a) $u = 2x + 1$, $u' = 2$, $v = x - 3$, $v' = 1$:

$$\frac{2(x - 3) - (2x + 1) \cdot 1}{(x - 3)^2} = \frac{-7}{(x - 3)^2}$$

b) $u = x$, $u' = 1$, $v = x^2 + 1$, $v' = 2x$:

$$\frac{1 \cdot \left(x^2 + 1\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

∎

EKSEMPEL *Brøker med e og ln*

Deriver.

a) $\dfrac{e^x}{x}$

b) $\dfrac{\ln x}{x}$

Løsning

a) $\dfrac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

b) $\dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

▪

EKSEMPEL *Kostnad per enhet*

Kostnaden for å lage x enheter er $K(x) = 2x^2 + 50x + 800$ kroner. Finn antall enheter som gir lavest kostnad per enhet, $G(x) = \dfrac{K(x)}{x}$.

Løsning

$G(x) = 2x + 50 + 800x^{-1}$, så $G'(x) = 2 - \dfrac{800}{x^2}$.

$G'(x) = 0$ gir $x^2 = 400$, altså $x = 20$. Kostnaden per enhet er da $G(20) = 40 + 50 + 40 = 130$ kroner.

▪

4.47 Deriver.

a) $\dfrac{x}{x-2}$

b) $\dfrac{x+1}{x-1}$

c) $\dfrac{2x}{x+5}$

d) $\dfrac{x-4}{3x+1}$

4.48 Deriver.

a) $\dfrac{x^2}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2+1}{x}$

c) $\dfrac{x}{x^2+9}$

d) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

4.49 Deriver.

a) $\dfrac{e^x}{x^2}$

b) $\dfrac{x^2}{e^x}$

c) $\dfrac{\ln x}{x^3}$

d) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$

4.50 Deriver med kjerneregelen, ikke brøkregelen.

a) $\dfrac{2}{x^2+3}$

b) $\dfrac{1}{e^x+1}$

c) $\dfrac{5}{(2x-1)^3}$

4.51 Forkort eller del opp brøken først, og deriver.

a) $\dfrac{x^2+5x}{x}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$

c) $\dfrac{4x^3+x}{x^2}$

4.52 Hvor har grafen vannrett tangent?

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

b) $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

4.53 Finn tangenten.

a) Til $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ i $x = 0$.

b) Til $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ i $x = 1$.

c) Til $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ i $x = 2$.

4.54 Kostnaden for å lage x enheter er $K(x) = 0{,}5\,x^2 + 10x + 2000$ kroner.

a) Finn kostnaden per enhet $G(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, og skriv den som en sum av tre ledd.

b) Finn $G'(x)$.

c) Hvor mange enheter gir lavest kostnad per enhet?

4.55 Konsentrasjonen av et legemiddel er $K(t) = \dfrac{20t}{t^2+9}$ mg/L etter t timer.

a) Finn $K'(t)$.

b) Når er konsentrasjonen høyest, og hva er den da?

4.56 Utled brøkregelen ved å skrive $\dfrac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$ og bruke produktregelen og kjerneregelen.

4.57 Finn feilene, og deriver riktig.

a) $\left(\dfrac{x}{x+2}\right)' = \dfrac{x-(x+2)}{(x+2)^2}$

b) $\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)' = \dfrac{2x}{1}$

c) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)' = \dfrac{x-(x+1)}{x}$

4.58 Hva blir utskriften?

Python

```
def G(x):
    return (x**2 + 400) / x

for x in [10, 20, 40]:
    print(x, G(x))
```

Hvilken x gir lavest verdi av G? Begrunn med $G'(x)$.

4.59 Vis at $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ er voksende for alle $x \neq -1$.

4.60 Finn a slik at $f(x) = \dfrac{ax+1}{x+2}$ har stigningstallet 1 i $x = 0$.

4.61 Deriver $\dfrac{(x+1)^{20}}{(x+1)^{18}}$ på enklest mulig måte.

Fasit

4.1.1 Kjerneregelen

4.1

a) $u = 2x + 7$, $g(u) = u^4$

b) $u = x^2 - 5$, $g(u) = \sqrt{u}$

c) $u = x^3 + x$, $g(u) = u^{-2}$

d) $u = 4x - 3$, $g(u) = \dfrac{1}{u}$

4.2

a) $2(x + 5)$

b) $12(3x - 2)^3$

c) $-12(1 - 4x)^2$

d) $3(0{,}5\,x + 1)^5$

4.3

a) $100(x + 1)^{99}$

b) $100(2x - 3)^{49}$

c) $40x\left(x^2 + 1\right)^{19}$

d) $-99(5 - x)^{98}$

4.4

a) $6x\left(x^2 + 3\right)^2$

b) $2\left(x^2 - x\right)(2x - 1)$

c) $30x^2\left(2x^3 + 1\right)^4$

d) $3\left(x^4 - 2x\right)^2\left(4x^3 - 2\right)$

4.5

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2x + 3}}$

b) $-\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$

d) $\dfrac{9}{\sqrt{6x}}$

4.6

a) $-\dfrac{1}{(x + 4)^2}$

b) $-\dfrac{6}{(3x + 1)^3}$

c) $-\dfrac{12x}{\left(x^2 + 2\right)^2}$

d) $-\dfrac{1}{2}(x + 1)^{-3/2}$

4.7

a) $6(2x - 1)^2$

b) $f'(1) = 6$ og $f'(0) = 6$

c) $f(1) = 1$: $y = 6x - 5$

4.8

$f(4) = 5$ og $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$, så $f'(4) = \dfrac{4}{5}$. $y = \dfrac{4}{5}(x - 4) + 5 = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{9}{5}$.

4.9

a) $4x\left(x^2 - 4\right) = 0$: $x = -2$, $x = 0$ og $x = 2$

b) $4(x - 3)^3 = 0$: $x = 3$

c) $\dfrac{2x - 6}{2\sqrt{x^2 - 6x + 10}} = 0$: $x = 3$

4.10

a) $x^2 + 6x + 9$ gir $2x + 6 = 2(x + 3)$.

b) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ gir $24x^2 - 24x + 6 = 6(2x - 1)^2$.

4.11

a) $A'(t) = 2s \cdot s'(t) = 2(2t + 3) \cdot 2 = 4(2t + 3)$

b) $A'(2) = 28$ cm² per sekund

4.12

a) $A'(t) = 2\pi r \cdot r'(t) = 2\pi\sqrt{t} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \pi$ m² per minutt

b) $A(t) = \pi t$, som vokser med π per minutt.

4.13

a) Gang med 4: $12(4x + 1)^2$

b) Kjernen skal stå urørt: $2\left(x^2 + 5\right) \cdot 2x = 4x\left(x^2 + 5\right)$

c) Gang med 3: $\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

4.14

> 4
> 12
> 20

For eksempel $f(x) = (2x + 1)^2$.

4.15

$f'(x) = 20x\left(x^2 - 1\right)^9$.

a) 0

b) 0

c) $40 \cdot 3^9$

4.16

Kjerneregelen: $2\left(\sqrt{x} + 1\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Gange ut: $x + 2\sqrt{x} + 1$ gir $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4.1.2 Kjerneregelen med e^x og $\ln x$

4.17

a) $5e^{5x}$

b) $-2e^{-2x}$

c) $\dfrac{1}{2}e^{x/2}$

d) $12e^{3x}$

e) $2e^{2x+1}$

4.18

a) $2xe^{x^2}$

b) $-2xe^{-x^2}$

c) $\left(3x^2 + 1\right)e^{x^3+x}$

d) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

4.19

a) $\dfrac{4}{4x + 1}$

b) $\dfrac{2x}{x^2 + 2}$

c) $-\dfrac{1}{1 - x}$

d) $\dfrac{e^x}{e^x + 1}$

4.20

a) $3\ln(2x + 1)$ gir $\dfrac{6}{2x + 1}$.

b) $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right)$ gir $\dfrac{x}{x^2 + 1}$.

c) $100 \ln x$ gir $\dfrac{100}{x}$.

4.21

a) $5 \ln 2 \cdot 2^{5x}$

b) $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2}$

c) $-\ln 10 \cdot 10^{-x}$

d) $0{,}5 \ln 2 \cdot 2^{0{,}1\,x}$

4.22

Kjernen er $u = x \ln a$ med $u' = \ln a$.

Da er $\left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$.

4.23

a) $y = 3x + 1$

b) $g'(x) = \dfrac{2}{x}$: $y = 2x - 2$

c) $y = x - 1$

4.24

a) $(2x - 4)e^{x^2-4x} = 0$: $x = 2$

b) $\dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0$: $x = 0$

c) $2e^{2x} = 4$: $x = \dfrac{\ln 2}{2}$

4.25

a) $m'(t) = -4e^{-0{,}05\,t}$

b) $m'(0) = -4$. Ved start minker massen med 4 gram per år.

c) $-0{,}05 \cdot 80e^{-0{,}05\,t} = -4e^{-0{,}05\,t} = m'(t)$

4.26

a) $K'(t) = 12\left(-0{,}2\,e^{-0{,}2\,t} + e^{-t}\right)$

b) $K'(0) = 12 \cdot 0{,}8 = 9{,}6$ mg/L per time

4.27

a) $4e^{4x}$

b) $2xe^{x^2}$

c) $\dfrac{3}{3x+2}$

4.28

```
0 80.0 -4.0
20 29.4 -1.5
```

Den siste kolonnen er $m'(t)$, altså hvor fort massen endrer seg.

4.29

a) 50

b) $N'(t) = \dfrac{240e^{-0{,}4\,t}}{\left(1+3e^{-0{,}4\,t}\right)^2}$

c) $N'(0) = \dfrac{240}{16} = 15$

4.30

$f'(0) = k = 6$.

4.31

Tangenten er $y = -e^{-a}(x-a) + e^{-a} = e^{-a}(1-x+a)$. Den er 0 når $x = a+1$.

4.2.1 Produktregelen

4.32

a) $e^x(x+1)$

b) $e^x\left(x^2+2x\right)$

c) $\ln x + 1$

d) $3x^2 \ln x + x^2$

4.33

a) $(x+4)+x = 2x+4$

b) $(x-1)+(x+1) = 2x$

c) $2x\left(x^3-2\right)+x^2\cdot 3x^2 = 5x^4-4x$

4.34

a) $e^x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)$

b) $e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $e^x(2x+3)$

d) $e^x\left(100x^{99}+x^{100}\right) = x^{99}e^x(100+x)$

4.35

a) $e^{-x}(1-x)$

b) $e^{3x}(1+3x)$

c) $e^{-2x}\left(2x-2x^2\right) = 2xe^{-2x}(1-x)$

d) $e^{-x}(1-(x+1)) = -xe^{-x}$

4.36

a) $(2x+1)^3 + 6x(2x+1)^2 = (2x+1)^2(8x+1)$

b) $\sqrt{x+4} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+4}}$

c) $\ln\left(x^2\right) + x\cdot\dfrac{2}{x} = \ln\left(x^2\right)+2$

d) $2x(x-1)^{10} + 10x^2(x-1)^9$

4.37

a) $e^x(x+1) = 0$: $x = -1$

b) $2x\ln x + x = x(2\ln x+1) = 0$: $x = e^{-1/2}$

c) $e^{-x}x(2-x) = 0$: $x = 0$ og $x = 2$

4.38

a) $y = x$

b) $y = x-1$

c) $h(2) = 2e^{-2}$ og $h'(2) = -e^{-2}$: $y = -e^{-2}(x-2)+2e^{-2} = e^{-2}(4-x)$

4.39

a) $R'(t) = -2(50+4t)+(100-2t)\cdot 4 = 300-16t$

b) $R'(5) = 220$ kroner per uke

c) $300-16t = 0$: $t = 18{,}75$ uker

4.40

a) $K'(t) = 5e^{-0{,}5\,t} - 2{,}5\,te^{-0{,}5\,t} = e^{-0{,}5\,t}(5-2{,}5\,t)$

b) $5-2{,}5\,t = 0$: $t = 2$ timer

4.41

a) $2xe^x + x^2e^x$

b) $\ln x + 1$

c) $e^{2x} + 2xe^{2x}$

4.42

Når sidene vokser med Δu og Δv, vokser arealet med $\Delta u\cdot v + u\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v$. Deler vi på Δx og lar $\Delta x \to 0$, blir dette $u'v+uv'$, fordi hjørnet $\Delta u\cdot\Delta v$ blir forsvinnende lite.

4.43

```
0
9
24
```

$f(x) = x^2(x+3)$

4.44

$f'(x) = 3x^2(x-1)^{50} + 50x^3(x-1)^{49}$. Begge leddene er 0 i $x = 1$, så $f'(1) = 0$.

4.45

$f'(x) = e^{ax}(1+ax) = 0$ gir $x = -\dfrac{1}{a} = 4$, så $a = -\dfrac{1}{4}$.

4.46

$2xe^x\ln x + x^2e^x\ln x + xe^x$

4.3.1 Brøkregelen

4.47

a) $-\dfrac{2}{(x-2)^2}$

b) $-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

c) $\dfrac{10}{(x+5)^2}$

d) $\dfrac{13}{(3x+1)^2}$

4.48

a) $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^2}$

c) $\dfrac{9-x^2}{\left(x^2+9\right)^2}$

d) $\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$

4.49

a) $\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

b) $\dfrac{2x-x^2}{e^x}$

c) $\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$

d) $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

4.50

a) $-\dfrac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}$

b) $-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

c) $-\dfrac{30}{(2x-1)^4}$

4.51

a) $x+5$ gir 1.

b) $x+3$ gir 1.

c) $4x+\dfrac{1}{x}$ gir $4-\dfrac{1}{x^2}$.

4.52

a) $1-x^2 = 0$: $x = -1$ og $x = 1$

b) $e^x(x-1) = 0$: $x = 1$

c) $x^2-2x = 0$: $x = 0$ og $x = 2$

4.53

a) $y = x$

b) $y = x - 1$

c) $h(2) = 5$ og $h'(x) = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$, så $h'(2) = -3$: $y = -3x + 11$

4.54

a) $G(x) = 0{,}5\,x + 10 + \dfrac{2000}{x}$

b) $G'(x) = 0{,}5 - \dfrac{2000}{x^2}$

c) $x^2 = 4000$: $x = \sqrt{4000} \approx 63$ enheter

4.55

a) $\dfrac{20\left(t^2+9\right) - 20t \cdot 2t}{\left(t^2+9\right)^2} = \dfrac{180 - 20t^2}{\left(t^2+9\right)^2}$

b) $t = 3$ timer, med $K(3) = \dfrac{60}{18} = \dfrac{10}{3}$ mg/L

4.56

$\left(uv^{-1}\right)' = u'v^{-1} - uv^{-2}v' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

4.57

a) Rekkefølgen er byttet: $\dfrac{2}{(x+2)^2}$

b) Teller og nevner kan ikke deriveres hver for seg: $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

c) Nevneren skal kvadreres: $-\dfrac{1}{x^2}$

4.58

```
10 50.0
20 40.0
40 50.0
```

$G(x) = x + \dfrac{400}{x}$, så $G'(x) = 1 - \dfrac{400}{x^2} =$ 0 gir $x = 20$.

4.59

$f'(x) = \dfrac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2} >$ 0.

4.60

$f'(x) = \dfrac{a(x+2) - (ax+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{2a-1}{(x+2)^2}$.

$f'(0) = \dfrac{2a-1}{4} = 1$ gir $a = \dfrac{5}{2}$.

4.61

Forkort til $(x+1)^2$, som gir $2(x+1)$.