3 Den deriverte

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

VEKSTFART

Stigningstall

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gjennomsnittlig vekstfart

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Momentan vekstfart i $x = a$

stigningstallet til tangenten i $(a, f(a))$

DEN DERIVERTE

Den deriverte

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tangentlikningen

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Framoverdifferanse

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Sentraldifferanse

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

DERIVERBARHET

Deriverbar i $x = a$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Ikke deriverbar ved knekk, brudd og loddrett tangent.

DERIVASJONSREGLER

Konstant

$$(c)' = 0$$

Potensregelen

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Konstant faktor

$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$

Sum og differanse

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Eksponentialfunksjonen

$$(e^x)' = e^x$$

Logaritmen

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Andre grunntall

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

3.1.1 Gjennomsnittlig vekstfart

EKSEMPEL *Stigningstallet til en linje*

Finn stigningstallet til linja gjennom $(1, 3)$ og $(4, 9)$.

Løsning

$$a = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

Linja går 2 opp for hvert steg til høyre. ∎

EKSEMPEL *Punkter på grafen*

Funksjonen $f(x) = x^2 - 4x$ er gitt. Finn koordinatene til punktene på grafen der $x = 1$ og $x = 4$.

Løsning

$f(1) = 1 - 4 = -3$ og $f(4) = 16 - 16 = 0$. Punktene er $(1, -3)$ og $(4, 0)$. ∎

EKSEMPEL *Gjennomsnittlig vekstfart for en andregradsfunksjon*

Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2 - 4x$ i intervallet $[1, 4]$.

Løsning

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - (-3)}{3} = 1$$

I snitt vokser f med 1 per steg i x på dette intervallet, selv om grafen først synker og så stiger. ∎

EKSEMPEL *Vekstfart fra en tabell*

Tabellen viser hvor mange følgere en konto hadde etter t uker.

t (uker)	0	2	6	10
følgere	200	260	500	580

Finn den gjennomsnittlige vekstfarten de første 2 ukene og fra uke 2 til uke 6.

Løsning

De første 2 ukene: $\frac{260 - 200}{2 - 0} = 30$ følgere per uke.

Fra uke 2 til uke 6: $\frac{500 - 260}{6 - 2} = 60$ følgere per uke.

Kontoen vokste dobbelt så fort i den andre perioden. ∎

EKSEMPEL *Ballen som kastes opp*

En ball kastes rett opp. Høyden etter t sekunder er $h(t) = 20t - 5t^2$ meter. Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallene $[0, 2]$ og $[2, 4]$, og forklar hva svarene betyr.

Løsning

$h(0) = 0$, $h(2) = 40 - 20 = 20$ og $h(4) = 80 - 80 = 0$.

$$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{20}{2} = 10$$

og

$$\frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{-20}{2} = -10$$

De to første sekundene stiger ballen med 10 m/s i snitt. De to neste sekundene faller den med 10 m/s i snitt. ∎

3.1 Finn stigningstallet til linja gjennom punktene.

a) $(0, 1)$ og $(2, 7)$

b) $(1, 5)$ og $(3, 1)$

c) $(-2, -3)$ og $(2, 5)$

d) $(1, 4)$ og $(5, 4)$

3.2 Funksjonen $f(x) = 2x^2 - 3$ er gitt. Finn koordinatene til punktet på grafen der

a) $x = 0$

b) $x = 2$

c) $x = -1$

3.3 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2$ i intervallet

a) $[0, 1]$

b) $[1, 2]$

c) $[2, 5]$

d) $[-3, 1]$

3.4 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^3 - x$ i intervallet

a) $[0, 2]$

b) $[-1, 1]$

c) $[1, 3]$

3.5 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = 5x - 2$ i intervallene $[0, 1]$ og $[10, 20]$. Forklar svarene.

3.6 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = \frac{1}{x}$ i intervallet

a) $[1, 2]$

b) $[2, 4]$

3.7 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = 2^x$ i intervallet

a) $[0, 3]$

b) $[3, 5]$

c) $[0, 10]$

3.8 Tabellen viser temperaturen T (°C) i et rom t timer etter at ovnen ble slått på.

t	0	1	3	6
T	12	15	19	21

Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet

a) $[0, 1]$

b) $[1, 3]$

c) $[3, 6]$

d) Hva skjer med vekstfarten? Forklar hvorfor det er rimelig.

3.9 En bil har kjørt $s(t) = 2t^2$ meter etter t sekunder.

a) Finn gjennomsnittsfarten de første 5 sekundene.

b) Finn gjennomsnittsfarten fra $t = 5$ til $t = 10$.

3.10 Et vannbasseng tømmes. Vannvolumet er $V(t) = 400 - 20t$ liter etter t minutter.

a) Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[0, 10]$. Husk enhet.

b) Forklar hvorfor svaret er negativt.

3.11 En ball kastes opp. Høyden er $h(t) = 15t - 5t^2$ meter etter t sekunder. Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet

a) $[0, 1]$

b) $[1, 2]$

c) $[0, 3]$

d) Forklar svaret i c).

3.12 Finn feilen. Lise skal finne den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2$ i $[1, 3]$ og skriver

$$\frac{f(3) - f(1)}{1 - 3} = \frac{8}{-2} = -4$$

3.13 Den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2$ i $[2, b]$ er 9. Finn b.

3.14 Vis at den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2 + 3x$ i $[a, b]$ er $a + b + 3$.

3.15 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^{100}$ i intervallet

a) $[0, 1]$

b) $[-1, 1]$

3.16 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return x**2 + 1

def vekstfart(a, b):
    return (f(b) - f(a)) / (b - a)

print(vekstfart(1, 3))
print(vekstfart(-2, 2))
```

3.1.2 Momentan vekstfart

EKSEMPEL *Stadig kortere intervaller*

Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2$ i intervallene $[3, 4]$, $[3; 3{,}1]$ og $[3; 3{,}01]$. Hva tror du den momentane vekstfarten er i $x = 3$?

Løsning

$$\frac{16 - 9}{1} = 7$$

$$\frac{9{,}61 - 9}{0{,}1} = 6{,}1$$

$$\frac{9{,}0601 - 9}{0{,}01} = 6{,}01$$

Svarene nærmer seg 6, så den momentane vekstfarten i $x = 3$ ser ut til å være 6. ∎

EKSEMPEL *Farten til ballen*

Høyden til en ball er $h(t) = 20t - 5t^2$ meter. Regn ut den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[1; 1{,}01]$, og bruk svaret til å anslå farten til ballen etter 1 sekund.

Løsning

$h(1) = 15$, så

$$\frac{15{,}0995 - 15}{0{,}01} = 9{,}95$$

Farten etter 1 sekund er omtrent 10 m/s oppover. Vekstfarten er positiv, så ballen er på vei opp. ∎

3.17 En tangent går gjennom punktene som er gitt. Finn stigningstallet, altså den momentane vekstfarten i tangeringspunktet.

a) $(1, 2)$ og $(3, 6)$

b) $(0, 5)$ og $(2, 1)$

c) $(-1, 3)$ og $(4, 3)$

3.18 Funksjonen $f(x) = x^2$ er gitt. Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i

a) $[1, 2]$

b) $[1; 1{,}1]$

c) $[1; 1{,}01]$

d) Gjett den momentane vekstfarten i $x = 1$.

3.19 Funksjonen $f(x) = x^2$ er gitt. Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i

a) $[4; 4{,}1]$

b) $[3{,}9; 4]$

c) Gjett den momentane vekstfarten i $x = 4$.

3.20 Funksjonen $f(x) = x^3$ er gitt.

a) Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i $[2; 2{,}1]$. Bruk at $2{,}1^3 = 9{,}261$.

b) Gjett den momentane vekstfarten i $x = 2$.

3.21 Hvilket fortegn har den momentane vekstfarten til $f(x) = x^2$ i

a) $x = 3$

b) $x = -2$

c) $x = 0$

Begrunn svarene med grafen.

3.22 En ball har høyden $h(t) = 20t - 5t^2$ meter.

a) Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i $[3; 3{,}1]$.

b) Anslå farten etter 3 sekunder. Er ballen på vei opp eller ned?

3.23 Volumet av vann i en tank er $V(t)$ liter etter t minutter. Forklar med ord hva dette betyr:

a) Den momentane vekstfarten når $t = 4$ er 12.

b) Den momentane vekstfarten når $t = 10$ er -5.

c) Den gjennomsnittlige vekstfarten i $[0, 10]$ er 0.

3.24 Forklar forskjellen på en sekant og en tangent. Hvilken av dem bruker vi for å finne

a) gjennomsnittlig vekstfart,

b) momentan vekstfart?

3.25 For $f(x) = x^2$ er den gjennomsnittlige vekstfarten i $[a, a + h]$ lik $2a + h$.

a) Kontroller formelen for $a = 3$ og $h = 1$.

b) Hva blir den momentane vekstfarten i $x = a$?

3.26 Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x) = x^2$ i intervallet $[5 - h, 5 + h]$. Hva sier svaret om den momentane vekstfarten i $x = 5$?

3.27 Finn feilen. Jonas leser av en tangent som går gjennom $(2, 3)$ og $(4, 7)$, og sier at den momentane vekstfarten er 3, fordi tangeringspunktet har y-verdien 3.

3.28 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return 2*x**2

a = 1
for h in [1, 0.1]:
    print(round((f(a + h) - f(a)) / h, 4))
```

Hvilket tall vil utskriften nærme seg når h blir mindre?

3.29 Hva blir utskriften?

Python

```
def s(t):
    return 5*t**2

h = 0.01
fart = (s(2 + h) - s(2)) / h
print(round(fart, 2))
```

Hva betyr tallet hvis $s(t)$ er strekningen i meter etter t sekunder?

3.30 Lag en skisse av en graf der

a) den momentane vekstfarten er positiv for alle x,

b) den momentane vekstfarten er 0 i $x = 1$ og negativ ellers.

3.31 En bil kjører 120 km på 1,5 timer uten å stanse. Forklar hvorfor speedometeret må ha vist nøyaktig 80 km/h minst én gang.

3.2.1 Definisjonen av den deriverte

EKSEMPEL *Den deriverte i et punkt*

Bruk definisjonen til å finne $f'(3)$ når $f(x) = x^2$.

Løsning

$$\begin{aligned}\frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{(3+h)^2 - 9}{h} \\ &= \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h\end{aligned}$$

Når $h \to 0$, går $6 + h$ mot 6. Altså er $f'(3) = 6$. ∎

EKSEMPEL *Den deriverte funksjonen til x^2*

Bruk definisjonen til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$. Bruk svaret til å finne $f'(-1)$ og $f'(5)$.

Løsning

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \to 2x\end{aligned}$$

Altså er $f'(x) = 2x$. Da er $f'(-1) = -2$ og $f'(5) = 10$. ∎

EKSEMPEL *Den deriverte av en lineær funksjon*
Bruk definisjonen til å finne $f'(x)$ når $f(x) = 3x + 1$. Forklar svaret med grafen.

Løsning

$$\frac{3(x+h)+1-(3x+1)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

$f'(x) = 3$ for alle x. Grafen er en rett linje med stigningstall 3, og tangenten til en rett linje er linja selv. ∎

EKSEMPEL *Tangenten til x^2 i et punkt*
Finn likningen for tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet der $x = 3$.

Løsning
$f(3) = 9$ og $f'(3) = 6$, så

$$y = 6(x-3) + 9 = 6x - 9$$

∎

3.32 Funksjonen $f(x) = x^2$ er gitt. Forenkle differansekvotienten $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, og finn $f'(a)$, når

a) $a = 2$

b) $a = 5$

c) $a = -3$

3.33 Bruk definisjonen av den deriverte til å finne

a) $f'(1)$ når $f(x) = 4x^2$

b) $f'(2)$ når $f(x) = x^2 - x$

c) $f'(0)$ når $f(x) = x^2 + 5x$

3.34 Bruk definisjonen til å finne $f'(x)$.

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = -2x + 3$

c) $f(x) = 3x^2$

d) $f(x) = x^2 + 4x$

3.35 Bruk definisjonen til å finne $f'(x)$ når $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3.36 Bruk definisjonen til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^3$.

3.37 Bruk definisjonen til å finne $f'(x)$ når $f(x) = \frac{1}{x}$, og regn ut $f'(2)$.

3.38 Bruk definisjonen til å finne $f'(4)$ når $f(x) = \sqrt{x}$.

3.39 Finn likningen for tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet der

a) $x = 1$

b) $x = 3$

c) $x = -2$

3.40 Funksjonen $f(x) = 3x^2$ er gitt. Finn tangenten i punktet $(1, 3)$.

3.41 Tangenten til grafen til f i punktet $(2, 5)$ har likningen $y = 3x - 1$.

a) Finn $f(2)$.

b) Finn $f'(2)$.

3.42 Finn feilen. Tor skal finne $f'(x)$ når $f(x) = 2x + 5$, og skriver

$$\frac{2(x+h)+5-2x+5}{h} = \frac{2h+10}{h}$$

3.43 Finn feilen. Ida skal finne $f'(3)$ når $f(x) = x^2$. Hun setter inn $h = 0$ i $\frac{(3+h)^2-9}{h}$ og får $\frac{0}{0}$. Hun konkluderer med at $f'(3)$ ikke finnes.

3.44 For hvilken x-verdi har tangenten til $f(x) = x^2$ stigningstallet

a) 8

b) -3

c) 0

3.45 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return x**2

for h in [1, 0.5]:
    print((f(2 + h) - f(2)) / h)
```

3.46 Funksjonen $f(x) = x^2 - 6x$ er gitt.

a) Bruk definisjonen til å finne $f'(x)$.

b) Hvor er tangenten vannrett?

c) Finn tangenten i punktet der $x = 1$.

3.47 Tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet $\left(a, a^2\right)$ går gjennom punktet $(0, -4)$. Finn de to mulige verdiene for a.

3.2.2 Numerisk derivasjon

EKSEMPEL *Framoverdifferanse for x^3*
Finn en tilnærmet verdi for $f'(1)$ når $f(x) = x^3$. Bruk $h = 0{,}1$.

Løsning

$$f'(1) \approx \frac{1{,}331 - 1}{0{,}1} = 3{,}31$$

Den riktige verdien er $f'(1) = 3$, så feilen er 0,31. ∎

EKSEMPEL *Sentraldifferanse for x^3*
Finn en tilnærmet verdi for $f'(1)$ når $f(x) = x^3$, med sentraldifferanse og $h = 0{,}1$.

Løsning

$$f'(1) \approx \frac{1{,}331 - 0{,}729}{0{,}2} = \frac{0{,}602}{0{,}2} = 3{,}01$$

Feilen er bare 0,01, mot 0,31 med framoverdifferanse. ■

EKSEMPEL *Farten fra en tabell*

Tabellen viser hvor langt en sykkel har kommet etter t sekunder.

t (s)	0	2	4	6	8
s (m)	0	6	20	42	72

Anslå farten etter 4 sekunder.

Løsning

$$s'(4) \approx \frac{s(6) - s(2)}{6 - 2} = \frac{42 - 6}{4} = 9$$

Farten etter 4 sekunder er omtrent 9 m/s. ■

3.48 Funksjonen $f(x) = x^2$ er gitt. Finn en tilnærmet verdi for $f'(2)$ med framoverdifferanse og

a) $h = 1$

b) $h = 0{,}1$

c) $h = 0{,}01$

3.49 Funksjonen $f(x) = x^2$ er gitt. Finn en tilnærmet verdi for $f'(2)$ med sentraldifferanse og

a) $h = 1$

b) $h = 0{,}1$

Hva legger du merke til?

3.50 Funksjonen $f(x) = x^3$ er gitt, og $f'(2) = 12$. Bruk $h = 0{,}1$, $2{,}1^3 = 9{,}261$ og $1{,}9^3 = 6{,}859$.

a) Finn framoverdifferansen.

b) Finn sentraldifferansen.

c) Hvilken metode gir minst feil?

3.51 Tabellen viser strekningen s (m) en løper har løpt etter t sekunder.

t	0	2	4	6	8
s	0	10	24	40	56

Anslå farten etter

a) 2 sekunder

b) 4 sekunder

c) 6 sekunder

3.52 Tabellen viser antall smittede N etter t dager.

t	10	12	14
N	400	520	700

a) Anslå $N'(12)$ med sentraldifferanse.

b) Hva betyr svaret?

3.53 Finn feilen. Ola anslår $f'(3)$ fra tabellen

x	2	3	4
f(x)	5	9	15

med sentraldifferanse og skriver $\frac{15 - 5}{1} = 10$.

3.54 For $f(x) = x^2$ i $x = 1$ gir framoverdifferansen $2 + h$.

a) Hva er feilen når $h = 0{,}01$?

b) Hvor liten må h være for at feilen skal bli mindre enn 10^{-6}?

3.55 For $f(x) = x^3$ gir sentraldifferansen i $x = a$ nøyaktig $3a^2 + h^2$.

a) Hva er feilen når $h = 0{,}1$?

b) Hva er feilen når $h = 0{,}01$?

c) Hvor mye mindre blir feilen når h blir ti ganger mindre?

3.56 Vis at sentraldifferansen for $f(x) = x^3$ er $3a^2 + h^2$.

3.57 Forklar hvorfor det er lurt å bruke $h = 10^{-5}$ heller enn $h = 10^{-15}$ når en datamaskin skal derivere numerisk.

3.58 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return x**2

def sentral(a, h):
    return (f(a + h) - f(a - h)) / (2*h)

print(sentral(3, 1))
print(sentral(3, 2))
```

3.59 Hva blir utskriften?

Python

```
t = [0, 1, 2, 3]
s = [0, 3, 8, 15]

for i in [1, 2]:
    fart = (s[i + 1] - s[i - 1]) / 2
    print(t[i], fart)
```

3.60 *Python* Endre programmet slik at det bruker sentraldifferanse i stedet for framoverdifferanse.

```
def f(x):
    return x**3

a = 2
h = 0.01
print((f(a + h) - f(a)) / h)
```

3.61 Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ er gitt. Finn en tilnærmet verdi for $f'(1)$ med sentraldifferanse og $h = 0{,}5$. Den eksakte verdien er -1.

3.62 Ser du på framoverdifferansen og «bakoverdifferansen» $\frac{f(a) - f(a-h)}{h}$, er sentraldifferansen gjennomsnittet av de to. Vis det.

3.2.3 Deriverbarhet

EKSEMPEL *Absoluttverdien har en knekk*

Vis at $f(x) = |x|$ ikke er deriverbar i $x = 0$.

Løsning

Differansekvotienten i 0 er $\frac{|h| - 0}{h} = \frac{|h|}{h}$.

- Når $h > 0$: $\frac{h}{h} = 1$.
- Når $h < 0$: $\frac{-h}{h} = -1$.

Grenseverdien fra høyre er 1 og fra venstre -1. De er ulike, så $f'(0)$ finnes ikke. Grafen har en knekk i origo.

EKSEMPEL *Loddrett tangent*

Vis at $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ ikke er deriverbar i $x = 0$.

Løsning

$$\frac{h^{1/3} - 0}{h} = h^{1/3-1} = h^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

Når $h \to 0$, går dette mot ∞. Tangenten i origo er loddrett, og f er ikke deriverbar der.

EKSEMPEL *Deriverbar i skjøtepunktet?*

Er funksjonen deriverbar i $x = 1$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x - 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Løsning

Kontinuitet: Fra venstre går x^2 mot 1, og $f(1) = 2 - 1 = 1$. Funksjonen er kontinuerlig.

Stigningstall: Fra venstre er det $2x = 2$ i $x = 1$. Fra høyre er det 2. De er like.

f er deriverbar i $x = 1$, med $f'(1) = 2$. Linja $2x - 1$ er faktisk tangenten til x^2 i punktet $(1, 1)$.

EKSEMPEL *Finn konstantene*

Finn p og q slik at funksjonen blir deriverbar i $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 2 \\ px + q, & x > 2 \end{cases}$$

Løsning

Stigningstall: $2x = 4$ i $x = 2$, så $p = 4$.

Kontinuitet: $2p + q = 2^2 = 4$, så $8 + q = 4$ og $q = -4$.

Funksjonen er deriverbar når $p = 4$ og $q = -4$.

3.63 Hvor er funksjonen ikke deriverbar?

a) $f(x) = |x - 1|$

b) $f(x) = |2x + 6|$

c) $f(x) = |x| + 3$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x - 4}$

3.64 Funksjonen $f(x) = |x - 3|$ er gitt.

a) Finn $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$ når $h > 0$.

b) Finn den samme brøken når $h < 0$.

c) Er f deriverbar i $x = 3$?

3.65 Avgjør om påstandene er sann eller usann.

a) Hvis f er deriverbar i a, er f kontinuerlig i a.

b) Hvis f er kontinuerlig i a, er f deriverbar i a.

c) En funksjon med et hopp i $x = a$ kan være deriverbar i a.

3.66 Er funksjonen kontinuerlig i $x = 2$? Er den deriverbar i $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 4x - 4, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

3.67 Er funksjonen kontinuerlig i $x = 1$? Er den deriverbar i $x = 1$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ x + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

3.68 Er funksjonen deriverbar i $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

3.69 Finn p og q slik at funksjonen blir deriverbar i $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1 \\ px + q, & x > 1 \end{cases}$$

3.70 Finn p og q slik at funksjonen blir deriverbar i $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} px + q, & x < 3 \\ x^2 - 2x, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

3.71 Finn k slik at funksjonen blir deriverbar i $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & x < 2 \\ 4x - 4, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

3.72 Vis at $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ikke er deriverbar i $x = 0$.

3.73 Skriv $f(x) = |x^2 - 4|$ med delt forskrift, og finn de x-verdiene der f ikke er deriverbar.

3.74 Finn feilen. Nora sier at $f(x) = \begin{cases} 2x, & x<1 \\ 2x+1, & x\geqslant 1 \end{cases}$ er deriverbar i $x = 1$, fordi begge delene har stigningstall 2.

3.75 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    if x < 1:
        return x**2
    return 2*x

for h in [0.5, -0.5]:
    print((f(1 + h) - f(1)) / h)
```

3.76 En parkeringsavgift er 20 kr for hver påbegynte time. Hvor er avgiften som funksjon av tida ikke deriverbar? Hva er den deriverte ellers?

3.77 Lag en funksjon som er kontinuerlig overalt, men ikke deriverbar i $x = -1$, $x = 0$ og $x = 1$.

3.3.1 Derivasjonsregler for potenser og polynomer

EKSEMPEL *Deriver potenser*

Deriver.

a) x^5

b) x^{100}

c) $\dfrac{1}{x^3}$

d) $\sqrt{x}$

Løsning

a) $5x^4$

b) $100x^{99}$

c) $\left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

d) $\left(x^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

■

EKSEMPEL *Deriver et polynom*

Deriver $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$.

Løsning

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 - 0 = 12x^2 - 4x + 5$$

■

EKSEMPEL *Stigningstall og tangent*

Funksjonen $f(x) = x^3 - 3x$ er gitt. Finn $f'(2)$ og tangenten i punktet der $x = 2$.

Løsning

$f'(x) = 3x^2 - 3$, så $f'(2) = 12 - 3 = 9$. Videre er $f(2) = 8 - 6 = 2$.

$$y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16$$

■

EKSEMPEL *Farten til en bil*

En bil starter fra ro, og etter t sekunder har den kjørt $s(t) = 1{,}5\,t^2$ meter. Finn farten etter 4 sekunder.

Løsning

$v(t) = s'(t) = 3t$, så $v(4) = 12$ m/s.

■

3.78 Deriver.

a) x^3

b) x^6

c) x^{10}

d) x

e) 12

3.79 Deriver. Eksponentene er store, men regelen er den samme.

a) x^{100}

b) $x^{50} + x^{49}$

c) $2x^{1000}$

d) $\dfrac{x^{100}}{100}$

3.80 Deriver.

a) $5x^2$

b) $-3x^4$

c) $\dfrac{1}{2}x^2$

d) $\dfrac{1}{3}x^3$

3.81 Deriver.

a) $x^2 + 3x - 4$

b) $2x^3 - 5x^2 + x$

c) $4 - x^2$

d) $x^4 - 2x^3 + 7$

3.82 Skriv som potenser og deriver.

a) $\frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{x^3}$

c) $\sqrt{x}$

d) $\sqrt[3]{x}$

3.83 Deriver.

a) $\frac{6}{x^2}$

b) $4\sqrt{x}$

c) $x^{5/2}$

d) $x\sqrt{x}$

3.84 Gang ut parentesene først, og deriver.

a) $(x+2)^2$

b) $x(x^2-3)$

c) $(2x-1)(x+4)$

3.85 Funksjonen $f(x) = x^3 - 4x$ er gitt. Finn

a) $f'(x)$

b) $f'(0)$

c) $f'(2)$

d) $f'(-1)$

3.86 Finn likningen for tangenten til grafen til f i punktet der $x = 1$.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^2 - 5x$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

3.87 Hvor har grafen til f vannrett tangent?

a) $f(x) = x^2 - 8x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 27x$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

3.88 En gjenstand har posisjonen $s(t) = t^3 - 6t^2 + 20t$ meter etter t sekunder.

a) Finn farten $v(t) = s'(t)$.

b) Finn farten etter 1 og 4 sekunder.

c) Når er farten minst? (Farten er en andregradsfunksjon.)

3.89 Det koster $K(x) = 0{,}5\,x^2 + 20x + 1000$ kroner å lage x enheter.

a) Finn $K'(x)$.

b) Finn $K'(40)$ og forklar hva tallet betyr.

3.90 Finn feilene, og deriver riktig.

a) $\left(x^4\right)' = 4x^4$

b) $(3x+7)' = 3x+7$

c) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{2x}$

3.91 Funksjonen $f(x) = x^2 + bx$ har en tangent med stigningstall 7 i $x = 2$. Finn b.

3.92 Tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet (a, a^2) er parallell med linja $y = 6x + 1$. Finn a og tangentlikningen.

3.93 Hva blir utskriften?

Python

```
def fd(x):
    return 4*x**3 - 2*x

for x in [-1, 0, 1, 2]:
    print(fd(x))
```

Hvilken funksjon kan `fd` være den deriverte av?

3.94 Finn en funksjon f slik at

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = 3x^2 + 1$

c) $f'(x) = 0$

3.3.2 Den deriverte av e^x og $\ln x$

EKSEMPEL *Deriver med e opphøyd i x*

Deriver $f(x) = 3e^x - x^2$, og finn tangenten i punktet der $x = 0$.

Løsning

$f'(x) = 3e^x - 2x$. Videre er $f(0) = 3$ og $f'(0) = 3$, så tangenten er

$$y = 3(x-0) + 3 = 3x + 3$$

■

EKSEMPEL *Deriver med ln x*

Deriver $f(x) = 2\ln x + x$, og finn $f'(1)$.

Løsning

$f'(x) = \frac{2}{x} + 1$, så $f'(1) = 3$.

■

EKSEMPEL *Bruk logaritmesetningene først*

Deriver $f(x) = \ln(5x)$ og $g(x) = \ln\left(x^3\right)$.

Løsning

$f(x) = \ln 5 + \ln x$. $\ln 5$ er en konstant, så $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$g(x) = 3\ln x$, så $g'(x) = \frac{3}{x}$.

■

EKSEMPEL *Deriver en eksponentialfunksjon*

Deriver $f(x) = 2^x$, og finn $f'(3)$ eksakt.

Løsning
$f'(x) = 2^x \ln 2$, så $f'(3) = 8 \ln 2$.

■

EKSEMPEL *Vekstfart i en befolkningsmodell*
Folketallet i en by er $N(t) = 500 \cdot 1{,}04^t$ tusen, der t er antall år etter 2020. Finn $N'(10)$ og forklar hva tallet betyr.

Løsning
$N'(t) = 500 \cdot 1{,}04^t \cdot \ln 1{,}04$, så

$$N'(10) = 500 \cdot 1{,}04^{10} \cdot \ln 1{,}04 \approx 29{,}0$$

I 2030 vokser folketallet med omtrent 29 tusen innbyggere per år.

■

3.95 Deriver.

a) e^x

b) $5e^x$

c) $e^x + x^3$

d) $-2e^x + 4$

e) e^3

3.96 Deriver.

a) $\ln x$

b) $4 \ln x$

c) $\ln x + x^2$

d) $x - 2 \ln x$

e) $\ln 7$

3.97 Finn $f'(x)$ og $f'(1)$.

a) $f(x) = 3e^x - x$

b) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = e^x + \ln x$

3.98 Bruk logaritmesetningene først, og deriver.

a) $\ln(2x)$

b) $\ln(x^5)$

c) $\ln \dfrac{x}{3}$

d) $\ln\left(x^{100}\right)$

3.99 Bruk logaritmesetningene først, og deriver.

a) $\ln\left(x^2\sqrt{x}\right)$

b) $\ln \dfrac{1}{x}$

c) $\ln(e^x)$

3.100 Deriver.

a) 2^x

b) 5^x

c) $3 \cdot 10^x$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

3.101 Finn likningen for tangenten.

a) $f(x) = e^x$ i $x = 0$

b) $f(x) = \ln x$ i $x = 1$

c) $f(x) = e^x$ i $x = 1$

3.102 Finn x-verdien der tangenten til grafen har stigningstallet som er gitt.

a) $f(x) = \ln x$, stigningstall 4

b) $f(x) = e^x$, stigningstall 1

c) $f(x) = e^x$, stigningstall e^2

3.103 Funksjonen $f(x) = x - \ln x$ er definert for $x > 0$.

a) Finn $f'(x)$.

b) Hvor er tangenten vannrett?

c) Er f voksende eller avtakende når $x > 1$?

3.104 Funksjonen $f(x) = e^x - 2x$ er gitt.

a) Finn $f'(x)$.

b) Hvor er tangenten vannrett? Svar eksakt.

3.105 En bakteriekultur har $N(t) = 300e^t$ bakterier etter t timer.

a) Finn $N'(t)$.

b) Vis at $N'(t) = N(t)$, og forklar hva det betyr.

3.106 Verdien til en bil er $V(t) = 400\,000 \cdot 0{,}85^t$ kroner etter t år.

a) Finn $V'(t)$.

b) Hvorfor er $V'(t)$ negativ?

3.107 Finn feilene, og deriver riktig.

a) $(e^x)' = xe^{x-1}$

b) $(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln x}$

c) $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$

d) $\left(e^5\right)' = 5e^4$

3.108 Hva blir utskriften?

Python

```
from math import log

h = 0.001
for a in [1, 2, 4]:
    fd = (log(a + h) - log(a - h)) / (2*h)
    print(a, round(fd, 3))
```

`log(a)` betyr $\ln a$. Hvilken regel bekrefter utskriften?

3.109 En tangent til grafen til $f(x) = \ln x$ går gjennom origo. Finn tangeringspunktet.

3.110 Funksjonen $f(x) = ax + \ln x$ har en vannrett tangent i $x = 2$. Finn a.

Fasit

3.1.1 Gjennomsnittlig vekstfart

3.1
a) 3
b) -2
c) 2
d) 0

3.2
a) $(0, -3)$
b) $(2, 5)$
c) $(-1, -1)$

3.3
a) 1
b) 3
c) $\frac{25-4}{3} = 7$
d) $\frac{1-9}{4} = -2$

3.4
a) $\frac{6-0}{2} = 3$
b) $\frac{0-0}{2} = 0$
c) $\frac{24-0}{2} = 12$

3.5
Begge gir 5. Grafen er en rett linje med stigningstall 5, så sekanten er linja selv.

3.6
a) $\frac{\frac{1}{2}-1}{1} = -\frac{1}{2}$
b) $\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8}$

3.7
a) $\frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$
b) $\frac{32-8}{2} = 12$
c) $\frac{1024-1}{10} = 102{,}3$

3.8
a) 3 °C per time
b) 2 °C per time
c) $\frac{2}{3}$ °C per time
d) Den avtar. Rommet nærmer seg temperaturen ovnen klarer å holde.

3.9
a) $\frac{50-0}{5} = 10$ m/s
b) $\frac{200-50}{5} = 30$ m/s

3.10
a) -20 liter per minutt
b) Volumet avtar.

3.11
a) 10 m/s
b) 0 m/s
c) 0 m/s
d) Ballen er tilbake på bakken etter 3 sekunder: $h(0) = h(3) = 0$.

3.12
Nevneren skal være $3 - 1 = 2$. Riktig svar er 4.

3.13
$\frac{b^2-4}{b-2} = b + 2 = 9$, så $b = 7$.

3.14
$$\frac{b^2+3b-a^2-3a}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)+3(b-a)}{b-a} = a + b + 3$$

3.15
a) $\frac{1-0}{1} = 1$
b) $\frac{1-1}{2} = 0$

3.16
```
4.0
0.0
```

3.1.2 Momentan vekstfart

3.17
a) 2
b) -2
c) 0

3.18
a) 3
b) $\frac{1{,}21-1}{0{,}1} = 2{,}1$
c) $\frac{1{,}0201-1}{0{,}01} = 2{,}01$
d) 2

3.19
a) $\frac{16{,}81-16}{0{,}1} = 8{,}1$
b) $\frac{16-15{,}21}{0{,}1} = 7{,}9$
c) 8

3.20
a) $\frac{9{,}261-8}{0{,}1} = 12{,}61$
b) 12

3.21
a) Positiv: grafen stiger.
b) Negativ: grafen synker.
c) 0: bunnpunkt, vannrett tangent.

3.22
a) $h(3) = 15$ og $h(3{,}1) = 13{,}95$:
$\frac{-1{,}05}{0{,}1} = -10{,}5$
b) Omtrent -10 m/s. Ballen er på vei ned.

3.23
a) Etter 4 minutter renner det inn 12 liter per minutt.
b) Etter 10 minutter renner det ut 5 liter per minutt.
c) Det er like mye vann i tanken etter 10 minutter som ved start.

3.24
En sekant går gjennom to punkter på grafen. En tangent berører grafen i ett punkt og har samme retning som grafen der.
a) Sekanten
b) Tangenten

3.25
a) $\frac{16-9}{1} = 7 = 2 \cdot 3 + 1$
b) $2a$

3.26
$\frac{(5+h)^2-(5-h)^2}{2h} = \frac{20h}{2h} = 10$. Den momentane vekstfarten er 10.

3.27
Vekstfarten er stigningstallet, ikke y-verdien: $\frac{7-3}{4-2} = 2$.

3.28
```
6.0
4.2
```
Utskriften nærmer seg 4.

3.29
20.05. Farten etter 2 sekunder er omtrent 20 m/s.

3.30
Mange svar er mulige, for eksempel
a) grafen til e^x eller en stigende linje
b) grafen til $-(x-1)^3$, som flater ut i $x = 1$

3.31
Gjennomsnittsfarten er 80 km/h. Farten kan ikke ha vært under 80 hele tida eller over 80 hele tida. Siden farten endrer seg uten hopp, må den ha vært nøyaktig 80 km/h en gang.

3.2.1 Definisjonen av den deriverte

3.32
a) $4 + h$, $f'(2) = 4$
b) $10 + h$, $f'(5) = 10$
c) $-6 + h$, $f'(-3) = -6$

3.33

a) $\dfrac{4(1+h)^2-4}{h} = 8+4h \to 8$

b) $\dfrac{(2+h)^2-(2+h)-2}{h} = 3+h \to 3$

c) $\dfrac{h^2+5h}{h} = h+5 \to 5$

3.34

a) $\dfrac{7-7}{h} = 0$

b) $\dfrac{-2h}{h} = -2$

c) $6x+3h \to 6x$

d) $2x+h+4 \to 2x+4$

3.35

$$\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h}$$
$$= \frac{2axh+ah^2+bh}{h}$$
$$= 2ax+ah+b \to 2ax+b$$

3.36

$\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2 \to 3x^2$

3.37

$\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \dfrac{-1}{x(x+h)} \to -\dfrac{1}{x^2}$, så $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

3.38

Gang med den konjugerte $\sqrt{4+h}+2$:

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} \to \frac{1}{4}$$

3.39

a) $y = 2x-1$

b) $y = 6x-9$

c) $y = -4x-4$

3.40

$f'(x) = 6x$ gir $f'(1) = 6$: $y = 6(x-1)+3 = 6x-3$.

3.41

a) 5

b) 3

3.42

Parentesen rundt $f(x)$ mangler: $-(2x+5) = -2x-5$. Riktig er $\dfrac{2h}{h} = 2$.

3.43

Hun må forenkle før hun setter inn: $\dfrac{6h+h^2}{h} = 6+h \to 6$. $f'(3) = 6$.

3.44

$f'(x) = 2x$.

a) $x = 4$

b) $x = -\dfrac{3}{2}$

c) $x = 0$

3.45

```
5.0
4.5
```

3.46

a) $2x-6$

b) $2x-6 = 0$ gir $x = 3$.

c) $f(1) = -5$ og $f'(1) = -4$: $y = -4(x-1)-5 = -4x-1$

3.47

Tangenten er $y = 2a(x-a)+a^2 = 2ax-a^2$. Gjennom $(0,-4)$: $-a^2 = -4$, så $a = 2$ eller $a = -2$.

3.2.2 Numerisk derivasjon

3.48

a) 5

b) 4,1

c) 4,01

3.49

a) $\dfrac{9-1}{2} = 4$

b) $\dfrac{4{,}41-3{,}61}{0{,}2} = 4$

Sentraldifferansen gir den eksakte verdien for andregradsfunksjoner.

3.50

a) $\dfrac{9{,}261-8}{0{,}1} = 12{,}61$

b) $\dfrac{9{,}261-6{,}859}{0{,}2} = 12{,}01$

c) Sentraldifferansen. Feilen er 0,01, mot 0,61.

3.51

a) $\dfrac{24-0}{4} = 6$ m/s

b) $\dfrac{40-10}{4} = 7{,}5$ m/s

c) $\dfrac{56-24}{4} = 8$ m/s

3.52

a) $\dfrac{700-400}{4} = 75$

b) På dag 12 øker antall smittede med omtrent 75 per dag.

3.53

Avstanden mellom $x = 2$ og $x = 4$ er 2. Riktig er $\dfrac{10}{2} = 5$.

3.54

a) 0,01

b) $h < 10^{-6}$

3.55

a) 0,01

b) 0,0001

c) Hundre ganger mindre.

3.56

$(a+h)^3-(a-h)^3 = 6a^2h+2h^3$. Delt på $2h$ gir dette $3a^2+h^2$.

3.57

Datamaskinen lagrer bare omtrent 16 sifre. Med $h = 10^{-15}$ er $f(a+h)$ og $f(a)$ nesten like, og de fleste sifrene forsvinner når vi trekker dem fra hverandre. Avrundingsfeilen blir da større enn feilen fra metoden.

3.58

```
6.0
6.0
```

3.59

```
1 4.0
2 6.0
```

3.60

Bytt ut siste linje med

```
print((f(a + h) - f(a - h)) / (2*h))
```

3.61

$\dfrac{\frac{1}{1{,}5}-\frac{1}{0{,}5}}{1} = \dfrac{2}{3}-2 = -\dfrac{4}{3}$

3.62

Summen av de to brøkene er $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$, fordi $f(a)$ forsvinner. Halvparten av det er $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

3.2.3 Deriverbarhet

3.63

a) $x = 1$ (knekk)

b) $x = -3$ (knekk)

c) $x = 0$ (knekk)

d) $x = 4$ (loddrett tangent)

3.64

a) $\dfrac{h}{h} = 1$

b) $\dfrac{-h}{h} = -1$

c) Nei, de ensidige grenseverdiene er ulike.

3.65

a) Sann

b) Usann, for eksempel $|x|$ i 0.

c) Usann. Den er ikke kontinuerlig, og derfor ikke deriverbar.

3.66

Kontinuerlig: $4 = 4$. Stigningstall: $2x = 4$ fra venstre og 4 fra høyre. Funksjonen er deriverbar.

3.67
Kontinuerlig: $2 = 2$. Stigningstall: 2 fra venstre og 1 fra høyre. Funksjonen er ikke deriverbar (knekk).

3.68
Nei. Funksjonen hopper fra 0 til 1, så den er ikke kontinuerlig, selv om stigningstallene er like.

3.69
$p = 2$ og $p + q = 1$, så $q = -1$.

3.70
Stigningstall: $2 \cdot 3 - 2 = 4$, så $p = 4$.
Kontinuitet: $3p + q = 3$, så $q = -9$.

3.71
Kontinuitet: $4k = 4$, så $k = 1$.
Stigningstall: $2kx = 4$ i $x = 2$, som stemmer. $k = 1$.

3.72
$\frac{h^{1/3}}{h} = h^{-2/3} \to \infty$ når $h \to 0$.
Tangenten er loddrett.

3.73
$f(x) = x^2 - 4$ når $|x| \geqslant 2$ og $f(x) = 4 - x^2$ når $|x| < 2$. I $x = 2$ er stigningstallet -4 fra venstre og 4 fra høyre, og i $x = -2$ er det -4 fra venstre og 4 fra høyre. f er ikke deriverbar i $x = -2$ og $x = 2$.

3.74
Funksjonen er ikke kontinuerlig i $x = 1$: $2 \neq 3$. Da er den heller ikke deriverbar.

3.75

```
2.0
3.5
```

Funksjonen er ikke kontinuerlig i $x = 1$ (fra venstre går x^2 mot 1, men $f(1) = 2$), så den er ikke deriverbar der.

3.76
Ikke deriverbar i $t = 1, 2, 3, \ldots$ timer, der avgiften hopper. Ellers er den deriverte 0, fordi avgiften er konstant mellom hoppene.

3.77
For eksempel $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$.

3.3.1 Derivasjonsregler for potenser og polynomer

3.78
a) $3x^2$
b) $6x^5$
c) $10x^9$
d) 1
e) 0

3.79
a) $100x^{99}$
b) $50x^{49} + 49x^{48}$
c) $2000x^{999}$
d) x^{99}

3.80
a) $10x$
b) $-12x^3$
c) x
d) x^2

3.81
a) $2x + 3$
b) $6x^2 - 10x + 1$
c) $-2x$
d) $4x^3 - 6x^2$

3.82
a) $-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
b) $-3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$
c) $\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
d) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$

3.83
a) $-12x^{-3} = -\frac{12}{x^3}$
b) $2x^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{x}}$
c) $\frac{5}{2}x^{3/2}$
d) $x^{3/2}$ gir $\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

3.84
a) $x^2 + 4x + 4$ gir $2x + 4$.
b) $x^3 - 3x$ gir $3x^2 - 3$.
c) $2x^2 + 7x - 4$ gir $4x + 7$.

3.85
a) $3x^2 - 4$
b) -4
c) 8
d) -1

3.86
a) $y = 3x - 2$
b) $f(1) = -4$, $f'(1) = -3$: $y = -3x - 1$
c) $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$: $y = -x + 2$

3.87
a) $2x - 8 = 0$: $x = 4$
b) $3x^2 - 27 = 0$: $x = -3$ og $x = 3$
c) $6x^2 - 6x = 0$: $x = 0$ og $x = 1$

3.88
a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 20$
b) $v(1) = 11$ m/s og $v(4) = 20$ m/s
c) Bunnpunktet til v: $t = \frac{12}{6} = 2$ s, med $v(2) = 8$ m/s.

3.89
a) $K'(x) = x + 20$
b) $K'(40) = 60$. Ved 40 enheter koster én enhet til omtrent 60 kroner.

3.90
a) Eksponenten skal bli én mindre: $4x^3$.
b) $(3x)' = 3$ og konstanten forsvinner: 3.
c) $\left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

3.91
$f'(2) = 4 + b = 7$, så $b = 3$.

3.92
$2a = 6$ gir $a = 3$. Tangenten er $y = 6x - 9$.

3.93

```
-2
0
2
28
```

For eksempel $f(x) = x^4 - x^2$ (pluss en hvilken som helst konstant).

3.94
Mange svar er mulige, for eksempel
a) x^2
b) $x^3 + x$
c) 5

3.3.2 Den deriverte av e^x og $\ln x$

3.95
a) e^x
b) $5e^x$
c) $e^x + 3x^2$
d) $-2e^x$
e) 0

3.96
a) $\frac{1}{x}$
b) $\frac{4}{x}$
c) $\frac{1}{x} + 2x$
d) $1 - \frac{2}{x}$
e) 0

3.97
a) $3e^x - 1$, $f'(1) = 3e - 1$
b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $f'(1) = 0$
c) $e^x + \frac{1}{x}$, $f'(1) = e + 1$

3.98

a) $\ln 2 + \ln x$ gir $\frac{1}{x}$.

b) $5 \ln x$ gir $\frac{5}{x}$.

c) $\ln x - \ln 3$ gir $\frac{1}{x}$.

d) $100 \ln x$ gir $\frac{100}{x}$.

3.99

a) $\ln\left(x^{5/2}\right) = \frac{5}{2} \ln x$ gir $\frac{5}{2x}$.

b) $-\ln x$ gir $-\frac{1}{x}$.

c) $\ln(e^x) = x$ gir 1.

3.100

a) $2^x \ln 2$

b) $5^x \ln 5$

c) $3 \cdot 10^x \ln 10$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2$

3.101

a) $y = x + 1$

b) $y = x - 1$

c) $y = e(x - 1) + e = ex$

3.102

a) $\frac{1}{x} = 4$: $x = \frac{1}{4}$

b) $e^x = 1$: $x = 0$

c) $e^x = e^2$: $x = 2$

3.103

a) $1 - \frac{1}{x}$

b) $x = 1$

c) Voksende, fordi $f'(x) > 0$ når $x > 1$.

3.104

a) $e^x - 2$

b) $e^x = 2$ gir $x = \ln 2$.

3.105

a) $N'(t) = 300e^t$

b) $N'(t) = 300e^t = N(t)$. Vekstfarten er like stor som antall bakterier: Jo flere det er, jo raskere vokser kulturen.

3.106

a) $V'(t) = 400\,000 \cdot 0{,}85^t \ln 0{,}85$

b) $\ln 0{,}85 < 0$, fordi $0{,}85 < 1$. Verdien avtar.

3.107

a) e^x

b) $\frac{1}{x}$

c) $3^x \ln 3$

d) 0, fordi e^5 er en konstant.

3.108

```
1 1.0
2 0.5
4 0.25
```

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3.109

Tangenten i $x = a$: $y = \frac{1}{a}(x - a) + \ln a$. Gjennom origo: $0 = -1 + \ln a$, så $a = e$. Punktet er $(e, 1)$.

3.110

$f'(2) = a + \frac{1}{2} = 0$, så $a = -\frac{1}{2}$.