2 Funksjoner og kontinuitet

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

DEFINISJONSMENGDE OG SAMMENSATTE FUNKSJONER

Brøk

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{krever} \quad q(x) \neq 0$$

Kvadratrot

$$\sqrt{u} \quad \text{krever} \quad u \geqslant 0$$

Logaritme

$$\ln u \quad \text{krever} \quad u > 0$$

Sammensatt funksjon

$$f(g(x))$$

GRENSEVERDIER

Grenseverdi

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Grenseverdien finnes når

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Sum

$$\lim(f \pm g) = F \pm G$$

Produkt

$$\lim(f \cdot g) = F \cdot G$$

Kvotient

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{F}{G}, \quad G \neq 0$$

Uttrykket «0/0»

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

GRENSEVERDIER NÅR $x \to \pm\infty$

Lavere grad i telleren

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

Like grader

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + \ldots}{bx^n + \ldots} = \frac{a}{b}$$

Eksponentialfunksjonen vinner

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Logaritmen taper

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

KONTINUITET

Kontinuerlig i $x = a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Kontinuitet i skjøtepunktet

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ASYMPTOTER

Vertikal asymptote

$$x = a \quad \text{når}$$
$$f(x) \to \pm\infty \quad \text{for} \quad x \to a$$

Rasjonal funksjon

$$q(a) = 0 \quad \text{og} \quad p(a) \neq 0$$
$$\Longrightarrow x = a$$

Horisontal asymptote

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

Skrå asymptote

$$f(x) = ax + b + r(x)$$
$$\text{der} \quad r(x) \to 0$$

- Forkort før du leter etter vertikale asymptoter.
- Vertikale asymptoter skrives $x = a$, horisontale $y = b$.

2.1.1 Definisjonsmengde og verdimengde

EKSEMPEL *Finn definisjonsmengden*

Finn definisjonsmengden.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $g(x) = \sqrt{x+2}$

c) $h(x) = \ln(4-x)$

Løsning

a) Nevneren kan ikke være 0, så $x \neq 3$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

b) Det under rottegnet må være 0 eller større: $x + 2 \geqslant 0$, så $x \geqslant -2$. $D_g = [-2, \rightarrow\rangle$.

c) Det inne i logaritmen må være positivt: $4 - x > 0$, så $x < 4$. $D_h = \langle\leftarrow, 4\rangle$.

■

EKSEMPEL *Definisjonsmengde i en praktisk situasjon*

Et rektangel har omkrets 20 cm. Den ene siden er x cm, så arealet er $A(x) = x(10-x)$. Finn definisjonsmengden.

Løsning

Sidene er x og $10-x$. Begge må være positive, så $x > 0$ og $x < 10$. $D_A = \langle 0, 10\rangle$. Uttrykket $x(10-x)$ kan regnes ut for alle tall, men situasjonen gir grensene.

■

EKSEMPEL *Finn verdimengden*

Finn verdimengden.

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $g(x) = 2x + 1$ med $D_g = [0, 3]$

c) $h(x) = e^x + 1$

Løsning

a) $x^2 \geqslant 0$, så $f(x) \geqslant 3$. $V_f = [3, \rightarrow\rangle$.

b) g er voksende, så den minste verdien er $g(0) = 1$ og den største $g(3) = 7$. $V_g = [1, 7]$.

c) $e^x > 0$, så $h(x) > 1$. $V_h = \langle 1, \rightarrow\rangle$.

■

2.1 Finn definisjonsmengden.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

c) $f(x) = \sqrt{x+5}$

d) $f(x) = \ln x$

2.2 Finn definisjonsmengden.

a) $g(x) = \sqrt{6-2x}$

b) $g(x) = \ln(x+3)$

c) $g(x) = \dfrac{x}{2x+1}$

d) $g(x) = e^x - 4$

2.3 Finn definisjonsmengden. Nevneren kan bli null for flere verdier av x.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-9}$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4x}$

2.4 Finn definisjonsmengden. Her må to krav være oppfylt samtidig.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4-x)$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-3}$

2.5 Finn verdimengden.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 1$

d) $f(x) = 2x - 1$

2.6 Finn verdimengden.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = e^x + 2$

c) $f(x) = \sqrt{x} - 1$

d) $f(x) = \ln x$

2.7 Funksjonen $f(x) = 2x + 1$ har definisjonsmengden $D_f = [0, 4]$. Finn verdimengden.

2.8 Funksjonen $g(x) = 10 - 3x$ har definisjonsmengden $D_g = [-1, 3]$. Finn verdimengden.

2.9 Funksjonen $f(x) = x^2$ har definisjonsmengden $D_f = [-2, 3]$.

a) Hva er den minste funksjonsverdien?

b) Hva er den største funksjonsverdien?

c) Finn verdimengden.

2.10 Fullfør kvadratet og finn verdimengden.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

c) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

2.11 Finn definisjonsmengden og verdimengden.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2.12 En sykkelrytter holder farten 25 km/h. Strekningen hun har syklet etter t timer, er $s(t) = 25t$. Turen varer i 4 timer.

a) Finn en fornuftig definisjonsmengde.

b) Finn verdimengden.

2.13 Et rektangel har omkrets 20 cm. Den ene siden er x cm.

a) Vis at arealet er $A(x) = x(10 - x)$.

b) Finn definisjonsmengden.

c) Finn verdimengden.

2.14 Antall bakterier i en kultur er $N(t) = 200 \cdot 2^t$, der t er antall timer. Vi måler i 5 timer.

a) Finn definisjonsmengden.

b) Finn verdimengden.

2.15 Finn feilen.

a) Petter skriver at $f(x) = \sqrt{x-1}$ har $D_f = \langle 1, \rightarrow \rangle$.

b) Aisha skriver at $f(x) = x^2 + 1$ har $V_f = \mathbb{R}$.

c) Jonas skriver at $f(x) = \frac{1}{x+3}$ har $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2.16 Finn definisjonsmengden.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

2.17 Lag en funksjon som har

a) definisjonsmengde $[2, \rightarrow\rangle$,

b) definisjonsmengde $\mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$,

c) verdimengde $[-3, \rightarrow\rangle$.

2.2.1 Sammensatte funksjoner

EKSEMPEL *Rekkefølgen betyr noe*

La $f(x) = x^2$ og $g(x) = x + 3$.

a) Regn ut $f(g(2))$.

b) Finn uttrykkene for $f(g(x))$ og $g(f(x))$.

Løsning

a) $g(2) = 5$, så $f(g(2)) = f(5) = 25$.

b) $f(g(x)) = (x+3)^2$ og $g(f(x)) = x^2 + 3$. Uttrykkene er forskjellige, så rekkefølgen betyr noe.

■

EKSEMPEL *Finn kjernen*

Finn kjernen og den ytre funksjonen.

a) e^{2x}

b) $\ln\left(x^2 + 1\right)$

c) $\left(x^2 - 1\right)^5$

Løsning

a) Kjernen er $u = 2x$, og den ytre funksjonen er e^u.

b) Kjernen er $u = x^2 + 1$, og den ytre funksjonen er $\ln u$.

c) Kjernen er $u = x^2 - 1$, og den ytre funksjonen er u^5.

■

EKSEMPEL *Definisjonsmengden til en sammensatt funksjon*

Finn definisjonsmengden til $h(x) = \ln(2x - 6)$.

Løsning

Den ytre funksjonen er $\ln u$, som krever $u > 0$. Altså må $2x - 6 > 0$, og $x > 3$.

■

2.18 La $f(x) = 2x + 1$ og $g(x) = x^2$. Regn ut.

a) $f(g(3))$

b) $g(f(3))$

c) $f(f(1))$

d) $g(g(2))$

2.19 La $f(x) = x - 4$ og $g(x) = \sqrt{x}$. Regn ut.

a) $g(f(13))$

b) $f(g(25))$

c) $g(f(4))$

d) $f(g(0))$

2.20 La $f(x) = 3x - 2$ og $g(x) = x^2 + 1$. Finn et uttrykk for

a) $f(g(x))$

b) $g(f(x))$

c) $f(f(x))$

2.21 La $f(x) = e^x$ og $g(x) = 2x - 1$. Finn et uttrykk for

a) $f(g(x))$

b) $g(f(x))$

2.22 La $f(x) = \ln x$ og $g(x) = x^2 + 4$. Finn et uttrykk for

a) $f(g(x))$

b) $g(f(x))$

2.23 Finn kjernen $u(x)$ og den ytre funksjonen $g(u)$ slik at $h(x) = g(u(x))$.

a) $h(x) = (4x + 3)^5$

b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

c) $h(x) = e^{-0{,}5x}$

d) $h(x) = \ln(x^3 + 1)$

2.24 Finn kjernen $u(x)$ og den ytre funksjonen $g(u)$.

a) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $h(x) = 3(\ln x)^2$

c) $h(x) = e^{\sqrt{x}}$

d) $h(x) = (e^x + 1)^3$

2.25 La $f(x) = x + 2$ og $g(x) = x^2$. Løs likningen $f(g(x)) = g(f(x))$.

2.26 La $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x - 3$. Finn definisjonsmengden til

a) $f(g(x))$

b) $g(f(x))$

2.27 La $f(x) = \ln x$ og $g(x) = 5 - x$. Finn et uttrykk og definisjonsmengden til

a) $f(g(x))$

b) $g(f(x))$

2.28 La $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Finn $f(f(x))$ og definisjonsmengden.

2.29 En ballong blåses opp slik at radien etter t sekunder er $r(t) = 2t + 1$ cm. Volumet av en kule er $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

a) Finn $V(r(t))$.

b) Hva er volumet etter 1 sekund? Svar eksakt.

2.30 En vare koster x kroner uten moms. Prisen med moms er $m(x) = 1{,}25\,x$. I et salg får du 100 kroner i avslag: $a(x) = x - 100$.

a) Finn $a(m(x))$ og $m(a(x))$.

b) Hvilken rekkefølge er best for kunden?

2.31 Finn $f(x)$ når

a) $g(x) = x + 1$ og $f(g(x)) = (x + 1)^2 + 3$

b) $g(x) = x^2$ og $f(g(x)) = e^{x^2}$

c) $g(x) = 2x$ og $f(g(x)) = 4x^2$

2.32 Finn $g(x)$ når $f(x) = x^2$ og

a) $f(g(x)) = (x - 7)^2$

b) $f(g(x)) = 9x^2$, der $g(x) > 0$ for $x > 0$

c) $f(g(x)) = e^{2x}$, der $g(x) > 0$

2.33 La $f(x) = ax + b$ og $g(x) = cx + d$.

a) Vis at $f(g(x))$ også er en lineær funksjon.

b) Når er $f(g(x)) = g(f(x))$ for alle x?

2.3.1 Utforske grenseverdier

EKSEMPEL *Et hopp i grafen*

Funksjonen $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ er gitt. Finn de ensidige grenseverdiene når $x \to 0$. Finnes $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Løsning

For $x > 0$ er $|x| = x$, så $f(x) = 1$. For $x < 0$ er $|x| = -x$, så $f(x) = -1$. Altså er

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

De ensidige grenseverdiene er ulike, så $\lim_{x\to 0} f(x)$ finnes ikke. Grafen har et hopp i $x = 0$. ▪

EKSEMPEL *Uendelige grenseverdier*

Finn de ensidige grenseverdiene til $g(x) = \dfrac{1}{x}$ når $x \to 0$.

Løsning

$g(0{,}01) = 100$ og $g(-0{,}01) = -100$. Jo nærmere 0, jo større tall. Altså er

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

▪

2.34 Tabellen viser verdier av $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ nær $x = 1$.

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1

a) Hva ser $\lim_{x\to 1} f(x)$ ut til å være?

b) Er $f(1)$ definert?

2.35 Lag en tabell med $x = 2{,}9$, 2,99, 3,01 og 3,1 og gjett grenseverdien.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

2.36 Finn grenseverdien ved å sette inn.

a) $\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x)$

b) $\lim_{x\to -1}(4 - x^3)$

c) $\lim_{x\to 0} e^x$

d) $\lim_{x\to 9} \sqrt{x}$

2.37 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ 5-x, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

a) Finn $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

b) Finn $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

c) Finnes $\lim_{x\to 2} f(x)$?

2.38 Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x+1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Finn de ensidige grenseverdiene når $x \to 1$.

b) Finnes $\lim_{x\to 1} g(x)$?

2.39 Finn de ensidige grenseverdiene.

a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

b) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

d) $\lim_{x\to 0^+} \ln x$

2.40 Finn de ensidige grenseverdiene.

a) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{2}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{2}{x-3}$

c) $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{-1}{x+1}$

2.41 Funksjonen $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ er definert for $x \neq 0$.

a) Hva er $f(x)$ når $x > 0$? Og når $x < 0$?

b) Finn de ensidige grenseverdiene når $x \to 0$.

c) Finnes $\lim_{x\to 0} f(x)$?

2.42 Avgjør om påstandene er sanne eller usanne.

a) Hvis $f(2)$ ikke er definert, kan ikke $\lim_{x\to 2} f(x)$ finnes.

b) Hvis $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$, så er $f(2) = 5$.

c) Hvis grenseverdien fra venstre og fra høyre er like, så finnes grenseverdien.

2.43 Funksjonen h er gitt ved

$$h(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$$

a) Finn $\lim_{x\to 2} h(x)$.

b) Finn $h(2)$.

2.44 Hva skjer med $\dfrac{1}{(x-4)^2}$ når x nærmer seg 4 fra hver side? Finn $\lim_{x\to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2}$.

2.45 Tabellen viser verdier av $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

x	−0,01	−0,001	0,001	0,01
f(x)	0,995	0,9995	1,0005	1,005

Hva ser $\lim_{x\to 0} f(x)$ ut til å være?

2.46 Finn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke finnes.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x}$

b) $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{x-5}$

c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{(x-5)^2}$

2.47 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ a, & x = 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$$

a) Finnes $\lim_{x\to 1} f(x)$?

b) Hvilken verdi må a ha for at $f(1)$ skal være lik grenseverdien?

2.48 Lag en funksjon f der

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ og $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$,

b) $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$.

2.49 Tallet $1{,}001^{1000}$ er omtrent 2,717, og $1{,}0001^{10000}$ er omtrent 2,718. Hvilken grenseverdi tror du

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

er?

2.3.2 Grenseverdisetningene

EKSEMPEL *Grenseverdier ved innsetting*

Finn grenseverdiene.

a) $\lim_{x\to 2}(x^3 - 2x + 1)$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{x+1}$

Løsning

a) $2^3 - 2\cdot 2 + 1 = 5$

b) $\dfrac{2+3}{1+1} = \dfrac{5}{2}$

■

EKSEMPEL *Faktoriser og forkort*

Finn grenseverdiene.

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

Løsning

a)

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$$

■

EKSEMPEL *Grenseverdi med rot*

Finn $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Løsning

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

■

2.50 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 3}(2x^2-x+4)$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x+1}$

c) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}$

d) $\lim_{x\to 0}(e^x+x)$

2.51 Faktoriser og forkort. Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

b) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+5x}{x}$

d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$

2.52 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

b) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

c) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$

d) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$

2.53 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{x^2-2x}$

c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$

2.54 Finn grenseverdien. Bruk $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

2.55 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-4}{h}$

b) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

c) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{h}$

2.56 Gang med den konjugerte og finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

b) $\lim_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

2.57 Vi vet at $\lim_{x\to 2}f(x)=3$ og $\lim_{x\to 2}g(x)=-1$. Finn

a) $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

b) $\lim_{x\to 2}f(x)\cdot g(x)$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $\lim_{x\to 2}\Big(2f(x)-g(x)^2\Big)$

2.58 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2}$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^2+2x}$

c) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x-5}{5-x}$

2.59 Finn feilen.

a) Lise skriver $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{0}{0}=0$.

b) Ola skriver $\lim_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{6}{0}=0$.

2.60 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

2.61 Finn konstanten a slik at grenseverdien finnes, og regn ut grenseverdien.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-6}{x-2}$$

2.62 Finn konstanten k slik at grenseverdien finnes, og regn ut grenseverdien.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+kx+4}{x+1}$$

2.63 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

2.64 La $f(x) = x^2$. Finn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

uttrykt ved a. (Dette er den deriverte, som du lærer om i kapittel 3.)

2.65 Finn grenseverdien.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{x - 3}$$

2.3.3 Grenseverdier når $x \to \pm\infty$

EKSEMPEL *Grenseverdier av rasjonale funksjoner*

Finn grenseverdiene.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x}{x^2+1}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

Løsning

a) Like grader: $\dfrac{3x^2+1}{x^2-2} = \dfrac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}} \to 3.$

b) Lavere grad i telleren: $\dfrac{5x}{x^2+1} = \dfrac{\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0.$

c) Høyere grad i telleren: $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x}{1+\frac{1}{x}} \to \infty.$

■

EKSEMPEL *Grenseverdier i modeller*

Finn grenseverdiene, og forklar hva de betyr.

a) Konsentrasjonen av en medisin er $C(t) = \dfrac{50t}{t+10}$. Finn $\lim_{t\to\infty} C(t)$.

b) Antall dyr i en bestand er $P(t) = \dfrac{1000}{1+9e^{-t}}$. Finn $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

Løsning

a) Like grader, så $C(t) \to 50$. Konsentrasjonen nærmer seg 50, men blir aldri høyere.

b) $e^{-t} \to 0$, så $P(t) \to \dfrac{1000}{1+0} = 1000$. Bestanden vokser mot 1000 dyr. Dette er en logistisk modell, som du møter igjen i kapittel 9.

■

2.66 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5}{x^2}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(2 + \dfrac{4}{x}\right)$

2.67 Del på den høyeste potensen av x i nevneren og finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{x-2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-x}{2x^2+5}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+7}{x^2+1}$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6-x}{2x+3}$

2.68 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-2x}{x^3+4}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x+3}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x}$

2.69 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$

b) $\lim_{x\to-\infty} e^{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \ln x$

d) $\lim_{x\to\infty} (3 - 2e^{-x})$

2.70 Hvilken funksjon vokser raskest når $x \to \infty$? Bruk det til å finne grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^{10}}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln x}$

2.71 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

b) $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^x+1}{e^x}$

2.72 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4e^x-3}{e^x+2}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x-3}{e^x+2}$

2.73 Temperaturen i en kopp kaffe er $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}1\,t}$ grader etter t minutter.

a) Hva var temperaturen da kaffen ble skjenket?

b) Finn $\lim_{t\to\infty} T(t)$ og forklar hva tallet betyr.

2.74 En fiskebestand er gitt ved

$$N(t) = \frac{6000}{1 + 5e^{-0{,}4\,t}}$$

der t er antall år.

a) Finn $N(0)$.

b) Finn $\lim_{t\to\infty} N(t)$. Hva forteller tallet?

2.75 Konsentrasjonen av et legemiddel i blodet er $K(t) = \dfrac{8t}{t^2+4}$ mg/L etter t timer.

a) Finn $\lim_{t\to\infty} K(t)$.

b) Forklar hva svaret betyr.

2.76 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x}}{x}$

2.77 Finn konstanten a slik at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+3}{2x^2-x} = 5$$

2.78 Finn feilen.

a) Kari skriver $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2} = \dfrac{\infty}{\infty} = 1$.

b) Emil skriver $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{x^2} = 2$.

2.79 Finn grenseverdien. Gang med den konjugerte.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x} - x\right)$$

2.80 Lag en rasjonal funksjon f der

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$,

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

2.81 Finn grenseverdien.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

2.4.1 Kontinuerlige og diskontinuerlige funksjoner

EKSEMPEL *Kontinuerlig i et punkt?*

Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

er gitt. Er f kontinuerlig i $x = 1$?

Løsning

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1^2 = 1$, men $f(1) = 3$. Grenseverdien og funksjonsverdien er ulike, så f er ikke kontinuerlig i $x = 1$. Grafen har et hull i $(1, 1)$ og et enkeltpunkt i $(1, 3)$.

■

EKSEMPEL *Reparer en funksjon*

Funksjonen $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ er ikke definert for $x = 2$. Hvilken verdi må vi gi $g(2)$ for at funksjonen skal bli kontinuerlig i $x = 2$?

Løsning

$\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$. Setter vi $g(2) = 4$, er funksjonen kontinuerlig. Hullet i grafen blir tettet.

■

EKSEMPEL *Parkeringsavgift*

Parkeringsavgiften er 20 kroner per påbegynte time. Der grafen hopper, er funksjonen diskontinuerlig. Finn avgiften etter 2 timer og etter 2 timer og ett minutt. Hvor er funksjonen diskontinuerlig?

Løsning

Etter nøyaktig 2 timer har du betalt for to timer, altså 40 kroner. Etter 2 timer og ett minutt har du begynt på den tredje timen, og avgiften er 60 kroner. Funksjonen hopper ved hver hel time, så den er diskontinuerlig for $t = 1, 2, 3, \ldots$

■

2.82 Hvilke av funksjonene er kontinuerlige der de er definert?

a) $f(x) = x^3 - 2x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = e^x + \ln x$

2.83 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ x + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Finn $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ og $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

b) Finn $f(1)$.

c) Er f kontinuerlig i $x = 1$?

2.84 Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 2 \\ 3x - 1, & x > 2 \end{cases}$$

Er g kontinuerlig i $x = 2$? Begrunn svaret.

2.85 Funksjonen h er gitt ved

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

a) Finn $\lim_{x \to 2} h(x)$.

b) Er h kontinuerlig i $x = 2$?

c) Hvilken verdi må $h(2)$ ha for at h skal bli kontinuerlig?

2.86 Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ er ikke definert for $x = 3$. Hvilken verdi må vi gi $f(3)$ for å «tette hullet», slik at funksjonen blir kontinuerlig?

2.87 Tett hullet i grafen. Finn verdien funksjonen må ha i punktet.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ i $x = 0$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ i $x = -1$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ i $x = 1$

2.88 En parkeringsplass koster 30 kroner for hver påbegynte time. Kostnaden for å stå t timer, der $0 < t \leqslant 3$, er $K(t)$.

a) Finn $K(0{,}5)$, $K(1)$ og $K(1{,}2)$.

b) For hvilke t er K diskontinuerlig?

2.89 Avgjør om påstandene er sanne eller usanne.

a) En funksjon som er kontinuerlig i $x = a$, må være definert i $x = a$.

b) Hvis $\lim_{x \to a} f(x)$ finnes, er f kontinuerlig i $x = a$.

c) Summen av to kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig.

2.90 Funksjonen $f(x) = |x - 2|$.

a) Skriv f med delt forskrift.

b) Er f kontinuerlig i $x = 2$?

2.91 Finn konstanten a slik at funksjonen blir kontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$$

2.92 Finn feilen.

a) Sara sier at $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ ikke er kontinuerlig fordi grafen har et brudd i $x = 2$.

b) Mats sier at $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ er det samme som $f(x) = x + 2$.

2.93 Bruk at $f(x) = x^3 + x - 1$ er kontinuerlig. Regn ut $f(0)$ og $f(1)$, og forklar hvorfor likningen $f(x) = 0$ har en løsning mellom 0 og 1.

2.94 Vis at likningen $e^x = 3 - x$ har en løsning mellom 0 og 1.

2.95 Tett hullet i grafen.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ i $x = 2$

b) $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ i $x = 4$

2.96 Lag en funksjon som

a) er definert for alle x, men ikke kontinuerlig i $x = 0$,

b) er kontinuerlig overalt der den er definert, men ikke definert i $x = 1$.

2.4.2 Funksjoner med delt forskrift

EKSEMPEL *Regn ut funksjonsverdier*

Regn ut $P(8)$ og $P(15)$ for mobilabonnementet.

Løsning

$8 \leqslant 10$, så $P(8) = 199$ kroner.

$15 > 10$, så $P(15) = 199 + 30 \cdot 5 = 349$ kroner. ∎

EKSEMPEL *Er funksjonen kontinuerlig?*

Er

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 5 - x, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

kontinuerlig i $x = 2$?

Løsning

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 + 1 = 3$ og $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5 - 2 = 3$. Dessuten er $f(2) = 5 - 2 = 3$. Alle tre er like, så f er kontinuerlig i $x = 2$. ∎

EKSEMPEL *Finn konstanten*

Finn k slik at

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1 \\ kx + 3, & x > 1 \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

Løsning

Fra venstre: $1^2 = 1$. Fra høyre: $k \cdot 1 + 3 = k + 3$. Kontinuitet krever $k + 3 = 1$, så $k = -2$.

2.97 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 3x + 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Finn

a) $f(-2)$

b) $f(0)$

c) $f(4)$

2.98 Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \leqslant 1 \\ 2^x, & 1 < x < 3 \\ 10, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

Finn

a) $g(1)$

b) $g(2)$

c) $g(3)$

d) $g(-5)$

2.99 Er funksjonen kontinuerlig i skjøtepunktet?

a) $f(x) = \begin{cases} x+3, & x<1 \\ 5x-1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x<2 \\ x+3, & x \geqslant 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x<0 \\ 1-x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

2.100 Finn konstanten k slik at funksjonen blir kontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + k, & x < 3 \\ x^2 - 1, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

2.101 Finn konstanten a slik at funksjonen blir kontinuerlig.

a) $f(x) = \begin{cases} ax, & x<2 \\ x^2+2, & x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} ax^2-1, & x \leqslant -1 \\ 3x+5, & x>-1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x<0 \\ 4-x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

2.102 Finn konstanten k slik at funksjonen blir kontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1 \\ k(x-1)^2 + k - 2, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

2.103 Et mobilabonnement koster 99 kroner i måneden og inkluderer 10 GB. Hver GB utover koster 20 kroner.

a) Skriv prisen $P(x)$ for x GB med delt forskrift.

b) Finn $P(6)$ og $P(14)$.

c) Er P kontinuerlig i $x = 10$?

▪ **2.104** En taxi koster 60 kroner i startpris pluss 15 kroner per km de første 10 km. Etter det koster den 12 kroner per km.

a) Skriv prisen $T(x)$ for en tur på x km med delt forskrift.

b) Hva koster en tur på 25 km?

2.105 Finn de ensidige grenseverdiene i skjøtepunktet, og avgjør om grenseverdien finnes.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

2.106 Finn konstantene a og b slik at funksjonen blir kontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leqslant x < 2 \\ x^2, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

2.107 Finn feilen.

Nora skal finne k slik at

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x < 2 \\ x^2, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig. Hun skriver $k \cdot 2 + 1 = 2^2$, altså $k = 2$.

2.108 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    if x < 1:
        return 2*x
    else:
        return x**2 + 1

print(f(0), f(1), f(3))
```

2.109 Hva blir utskriften?

Python

```
def pris(x):
    if x <= 10:
        return 99
    else:
        return 99 + 20*(x - 10)

for gb in [5, 10, 12]:
    print(pris(gb))
```

2.110 Skriv funksjonen med delt forskrift.

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = |2x - 6|$

c) $f(x) = x + |x|$

2.111 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 1 \\ b, & x = 1 \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$$

Finn a og b slik at f blir kontinuerlig.

2.112 Lag en funksjon med delt forskrift som er kontinuerlig, som er lik x^2 for $x \leqslant 1$ og som er en rett linje for $x > 1$.

2.5.1 Vertikale asymptoter

EKSEMPEL *Finn vertikale asymptoter*

Finn de vertikale asymptotene.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Løsning

a) Nevneren er 0 for $x = 3$, og telleren er da 4. Asymptoten er $x = 3$.

b) $g(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$ for $x \neq 2$. Grafen har et hull i $(2,4)$, men ingen vertikal asymptote.

c) $x^2 - 1 = 0$ for $x = 1$ og $x = -1$, og telleren er 1. Asymptotene er $x = -1$ og $x = 1$. ▪

EKSEMPEL *Fra hvilken side?*

Finn $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x+1}{x-3}$ og $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x+1}{x-3}$.

Løsning

Nær $x = 3$ er telleren omtrent 4, altså positiv. Til høyre for 3 er nevneren et lite positivt tall, så brøken blir et stort positivt tall. Til venstre er nevneren et lite negativt tall. Altså er

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+1}{x-3} = \infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty$$

▪

EKSEMPEL *Logaritmefunksjoner*

Finn den vertikale asymptoten til $f(x) = \ln(x-1)$.

Løsning

$\ln u \to -\infty$ når $u \to 0^+$. Her er $u = x - 1$, som går mot 0 når $x \to 1^+$. Asymptoten er $x = 1$. ▪

2.113 Finn de vertikale asymptotene.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+4}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-6}$

2.114 Finn de vertikale asymptotene.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-6x+8}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+9}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-x}$

2.115 Asymptote eller hull? Undersøk hvert nullpunkt for nevneren.

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$

2.116 Finn den vertikale asymptoten og de ensidige grenseverdiene ved asymptoten.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{-3}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$

2.117 Finn den vertikale asymptoten.

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = \ln(x-2)$

c) $f(x) = \ln(5-x)$

d) $f(x) = 3 + \ln(x+1)$

2.118 Funksjonen $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

a) Finn den vertikale asymptoten.

b) Hva skjer med $f(x)$ når x nærmer seg asymptoten fra hver side?

2.119 Har funksjonen vertikale asymptoter?

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

2.120 Finn feilen.

a) Ida sier at $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-25}$ har to vertikale asymptoter, $x = 5$ og $x = -5$.

b) Tor sier at $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ ikke har noen vertikal asymptote fordi telleren aldri er null.

2.121 Funksjonen $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

a) Finn den vertikale asymptoten.

b) Regn ut $f(2{,}9)$ og $f(3{,}1)$. Stemmer det med grenseverdiene?

2.122 Finn konstanten a slik at $f(x) = \dfrac{x+2}{x-a}$ har en vertikal asymptote i $x = 4$.

2.123 Finn konstanten a slik at $f(x) = \dfrac{x-a}{x^2-9}$ bare har én vertikal asymptote.

2.124 Lag en rasjonal funksjon som

a) har vertikale asymptoter $x = -1$ og $x = 2$,

b) har et hull i $x = 3$ og ingen vertikale asymptoter.

2.125 Finn definisjonsmengden og de vertikale asymptotene.

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$

2.126 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return 1/(x - 2)

for x in [1.9, 1.99, 2.01, 2.1]:
    print(round(f(x)))
```

2.127 Konsentrasjonen av et stoff i en løsning er $K(v) = \dfrac{200}{v}$ g/L, der v er volumet i liter.

a) Finn $\lim_{v \to 0^+} K(v)$.

b) Forklar hvorfor modellen ikke kan gjelde for svært små volum.

2.5.2 Horisontale og skrå asymptoter

EKSEMPEL *Finn horisontale asymptoter*

Finn de horisontale asymptotene.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

b) $g(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$

c) $h(x) = e^{-x} + 3$

Løsning

a) Like grader, så $f(x) \to \dfrac{2}{1} = 2$. Asymptoten er $y = 2$.

b) Lavere grad i telleren, så $g(x) \to 0$. Asymptoten er $y = 0$.

c) Når $x \to \infty$, går $e^{-x} \to 0$, så $h(x) \to 3$. Asymptoten er $y = 3$. Når $x \to -\infty$, vokser e^{-x} over alle grenser, så det er bare til høyre grafen nærmer seg asymptoten.

■

EKSEMPEL *Finn den skrå asymptoten*

Finn den skrå asymptoten til $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x-1}$.

Løsning

$2x \cdot (x-1) = 2x^2 - 2x$, og resten er x. Så er $1 \cdot (x-1) = x - 1$, og resten er 1. Altså er

$$\frac{2x^2 - x}{x-1} = 2x + 1 + \frac{1}{x-1},$$

og den skrå asymptoten er $y = 2x + 1$.

■

EKSEMPEL *Asymptoter i en modell*

Konsentrasjonen av et stoff i blodet er $C(t) = \dfrac{20t+5}{t+1}$ mg/L, der t er antall timer. Finn konsentrasjonen ved start og den horisontale asymptoten. Hva betyr asymptoten?

Løsning

$C(0) = 5$ mg/L. Like grader gir $C(t) \to \dfrac{20}{1} = 20$, så asymptoten er $y = 20$. Konsentrasjonen stiger mot 20 mg/L, men når aldri dit.

■

2.128 Finn den horisontale asymptoten.

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x^2+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-5x}{x}$

2.129 Finn den horisontale asymptoten.

a) $f(x) = e^{-x} + 2$

b) $f(x) = 5 - 3e^{-2x}$

c) $f(x) = \dfrac{10}{1+e^{-x}}$ (når $x \to \infty$)

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

2.130 Finn alle asymptotene.

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-4}$

2.131 Finn den skrå asymptoten. Funksjonen er allerede skrevet som et polynom pluss en rest.

a) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{3}{x}$

b) $f(x) = x - 4 + \dfrac{1}{x+2}$

c) $f(x) = -x + \dfrac{5}{x^2}$

2.132 Skriv funksjonen som et polynom pluss en rest, og finn den skrå asymptoten.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-x+4}{x}$

2.133 Bruk polynomdivisjon og finn den skrå asymptoten.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

2.134 Hvilken type asymptote har funksjonen når $x \to \infty$: horisontal, skrå eller ingen? Se på gradene til teller og nevner.

a) $\dfrac{x^3+1}{x^2}$

b) $\dfrac{x^3+1}{x^3}$

c) $\dfrac{x^3+1}{x}$

d) $\dfrac{x^2+1}{x^3}$

2.135 Finn alle asymptotene til $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

2.136 En bedrift produserer x enheter. Gjennomsnittskostnaden per enhet er

$$G(x) = \frac{40x+5000}{x}$$

kroner.

a) Finn den horisontale asymptoten.

b) Forklar hva den betyr.

2.137 Finn feilen.

a) Lars sier at $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ har den horisontale asymptoten $y = 1$.

b) Mia sier at grafen til en funksjon aldri kan krysse en horisontal asymptote.

2.138 Finn konstantene a og b slik at $f(x) = \dfrac{ax+1}{x+b}$ har asymptotene $x = 2$ og $y = 3$.

2.139 Funksjonen $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$.

a) Finn den vertikale asymptoten.

b) Finn den skrå asymptoten.

c) Ligger grafen over eller under den skrå asymptoten når x er stor?

2.140 Finn den skrå asymptoten.

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2+1}{x^2}$$

2.141 Hva blir utskriften? Funksjonen har den skrå asymptoten $y = x$.

Python

```
def f(x):
    return (x**2 + 1)/x

for x in [10, 100, 1000]:
    print(round(f(x) - x, 4))
```

2.142 Lag en funksjon som har

a) den horisontale asymptoten $y = -2$ og den vertikale asymptoten $x = 1$,

b) den skrå asymptoten $y = 3x - 1$.

2.143 Finn alle asymptotene til $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2-x-2}$.

Fasit

2.1.1 Definisjonsmengde og verdimengde

2.1
a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$
c) $[-5, \to\rangle$
d) $\langle 0, \to\rangle$

2.2
a) $6 - 2x \geqslant 0$ gir $\langle \leftarrow, 3]$
b) $x + 3 > 0$ gir $\langle -3, \to\rangle$
c) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
d) $\mathbb{R}$

2.3
a) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$
b) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, så $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
c) $\mathbb{R}$ (nevneren er alltid minst 1)
d) $x^2 - 4x = x(x-4)$, så $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$

2.4
a) $x \geqslant 0$ og $x \neq 1$: $[0, \to\rangle \setminus \{1\}$
b) $x - 2 > 0$: $\langle 2, \to\rangle$
c) $x \geqslant 0$ og $x < 4$: $[0, 4\rangle$
d) $x > 0$ og $x \neq 3$: $\langle 0, \to\rangle \setminus \{3\}$

2.5
a) $[0, \to\rangle$
b) $[3, \to\rangle$
c) $\langle \leftarrow, 1]$
d) $\mathbb{R}$

2.6
a) $\langle 0, \to\rangle$
b) $\langle 2, \to\rangle$
c) $[-1, \to\rangle$
d) $\mathbb{R}$

2.7
f er voksende, så $V_f = [f(0), f(4)] = [1, 9]$.

2.8
g er avtakende, så $V_g = [g(3), g(-1)] = [1, 13]$.

2.9
a) $f(0) = 0$
b) $f(3) = 9$
c) $V_f = [0, 9]$

2.10
a) $(x-2)^2 + 3$, så $V_f = [3, \to\rangle$
b) $(x+3)^2 - 4$, så $V_f = [-4, \to\rangle$
c) $-(x-1)^2 + 4$, så $V_f = \langle \leftarrow, 4]$

2.11
a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V_f = \langle 0, \to\rangle$

2.12
a) $D_s = [0, 4]$
b) $V_s = [0, 100]$

2.13
a) Den andre siden er $\frac{20 - 2x}{2} = 10 - x$, så $A(x) = x(10 - x)$.
b) Begge sidene må være positive: $D_A = \langle 0, 10\rangle$.
c) $A(x) = 25 - (x-5)^2$. Største verdi er $A(5) = 25$, og arealet kan komme så nær 0 vi vil. $V_A = \langle 0, 25]$.

2.14
a) $D_N = [0, 5]$
b) N er voksende: $V_N = [N(0), N(5)] = [200, 6400]$.

2.15
a) $\sqrt{0} = 0$ er lov, så 1 skal være med: $D_f = [1, \to\rangle$.
b) $x^2 + 1 \geqslant 1$, så $V_f = [1, \to\rangle$.
c) Nevneren er null når $x = -3$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

2.16
a) $x^2 \geqslant 4$: $\langle \leftarrow, -2] \cup [2, \to\rangle$
b) $x^2 > 0$: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
c) $\frac{1}{x} \geqslant 0$ og $x \neq 0$: $\langle 0, \to\rangle$

2.17
Mange svar er mulige, for eksempel
a) $f(x) = \sqrt{x-2}$
b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-5)}$
c) $f(x) = x^2 - 3$

2.2.1 Sammensatte funksjoner

2.18
a) $f(9) = 19$
b) $g(7) = 49$
c) $f(3) = 7$
d) $g(4) = 16$

2.19
a) $g(9) = 3$
b) $f(5) = 1$
c) $g(0) = 0$
d) $f(0) = -4$

2.20
a) $3(x^2 + 1) - 2 = 3x^2 + 1$
b) $(3x - 2)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 5$
c) $3(3x - 2) - 2 = 9x - 8$

2.21
a) e^{2x-1}
b) $2e^x - 1$

2.22
a) $\ln(x^2 + 4)$
b) $(\ln x)^2 + 4$

2.23
a) $u = 4x + 3$, $g(u) = u^5$
b) $u = x^2 + 9$, $g(u) = \sqrt{u}$
c) $u = -0{,}5\,x$, $g(u) = e^u$
d) $u = x^3 + 1$, $g(u) = \ln u$

2.24
a) $u = x^2 - 1$, $g(u) = \frac{1}{u}$
b) $u = \ln x$, $g(u) = 3u^2$
c) $u = \sqrt{x}$, $g(u) = e^u$
d) $u = e^x + 1$, $g(u) = u^3$

2.25
$x^2 + 2 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ gir $4x = -2$, altså $x = -\frac{1}{2}$.

2.26
a) $\sqrt{x-3}$: $D = [3, \to\rangle$
b) $\sqrt{x} - 3$: $D = [0, \to\rangle$

2.27
a) $\ln(5 - x)$, $D = \langle \leftarrow, 5\rangle$
b) $5 - \ln x$, $D = \langle 0, \to\rangle$

2.28
$f(f(x)) = \frac{1}{1/x} = x$, men bare for $x \neq 0$.
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.29
a) $V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi(2t+1)^3$
b) $\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$ cm^3

2.30
a) $a(m(x)) = 1{,}25\,x - 100$ og $m(a(x)) = 1{,}25\,x - 125$
b) $m(a(x))$: avslaget trekkes fra før momsen legges på, og kunden sparer 25 kroner mer.

2.31
a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = e^x$
c) $f(g(x)) = (2x)^2$, så $f(x) = x^2$

2.32
a) $g(x) = x - 7$ (eller $7 - x$)
b) $g(x) = 3x$
c) $g(x) = e^x$

2.33

a) $f(g(x)) = a(cx+d)+b = acx + (ad+b)$, som er lineær.

b) $g(f(x)) = acx + (bc+d)$. Leddene er like når $ad+b = bc+d$.

2.3.1 Utforske grenseverdier

2.34

a) 2

b) Nei, nevneren blir null.

2.35

Verdiene er 5,9, 5,99, 6,01 og 6,1.

Grenseverdien ser ut til å være 6.

2.36

a) 10

b) 5

c) 1

d) 3

2.37

a) 3

b) 3

c) Ja, grenseverdien er 3.

2.38

a) Fra venstre: 1. Fra høyre: 3.

b) Nei, de ensidige grenseverdiene er ulike.

2.39

a) ∞

b) $-\infty$

c) ∞

d) $-\infty$

2.40

a) ∞

b) $-\infty$

c) $-\infty$

2.41

a) 1 når $x > 0$ og -1 når $x < 0$

b) Fra høyre: 1. Fra venstre: -1.

c) Nei.

2.42

a) Usann. Se oppgaven med $\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

b) Usann. $f(2)$ kan være noe annet eller ikke være definert.

c) Sann.

2.43

a) 3

b) 7

2.44

Nevneren er positiv og går mot 0 fra begge sider, så grenseverdien er ∞.

2.45

1

2.46

a) $\dfrac{x(x+1)}{x} = x+1 \to 1$

b) Finnes ikke: $-\infty$ fra venstre og ∞ fra høyre.

c) ∞

2.47

a) Ja, begge ensidige grenseverdier er 2.

b) $a = 2$

2.48

Mange svar er mulige, for eksempel

a) $f(x) = x-1$ for $x < 1$ og $f(x) = 4$ for $x \geqslant 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

2.49

$e \approx 2{,}718$

2.3.2 Grenseverdisetningene

2.50

a) 19

b) 2

c) 3

d) 1

2.51

a) $x+2 \to 4$

b) $x-3 \to -6$

c) $x+5 \to 5$

d) $\dfrac{1}{x+1} \to \dfrac{1}{2}$

2.52

a) $x-3 \to -1$

b) $x+2 \to 5$

c) $x+3 \to 2$

d) $\dfrac{x+4}{x} \to 2$

2.53

a) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x+1} \to \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \dfrac{2(x+2)}{x} \to 4$

c) $\dfrac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x}{x-2} \to \dfrac{1}{2}$

2.54

a) $x^2+x+1 \to 3$

b) $x^2+2x+4 \to 12$

2.55

a) $\dfrac{4h+h^2}{h} = 4+h \to 4$

b) $6+h \to 6$

c) $\dfrac{3h+3h^2+h^3}{h} = 3+3h+h^2 \to 3$

2.56

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} \to \dfrac{1}{4}$

b) $\sqrt{x}+3 \to 6$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} \to \dfrac{1}{2}$

2.57

a) 2

b) -3

c) -3

d) $6-1 = 5$

2.58

a) $x-2 \to -2$

b) $\dfrac{3}{x+2} \to \dfrac{3}{2}$

c) -1

2.59

a) $\dfrac{0}{0}$ er ikke et tall. Faktoriser: grenseverdien er 4.

b) $\dfrac{6}{0}$ er ikke 0. Brøken vokser i tallverdi uten grense, så grenseverdien finnes ikke.

2.60

a) $\dfrac{1}{x}-1 = \dfrac{1-x}{x}$, så brøken blir $-\dfrac{1}{x} \to -1$.

b) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2} = \dfrac{2-x}{2x}$, så brøken blir $-\dfrac{1}{2x} \to -\dfrac{1}{4}$.

2.61

Telleren må være 0 for $x = 2$: $4+2a-6 = 0$ gir $a = 1$. Da er $\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x+3 \to 5$.

2.62

$1-k+4 = 0$ gir $k = 5$. Da er $\dfrac{(x+1)(x+4)}{x+1} = x+4 \to 3$.

2.63

a) $\dfrac{1}{\sqrt{4+x}+2} \to \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} \to \dfrac{1}{4}$

2.64

$\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = 2a+h \to 2a$

2.65

$x^3-3x^2+2x-6 = x^2(x-3)+2(x-3) = (x-3)(x^2+2)$, så grenseverdien er $3^2+2 = 11$.

2.3.3 Grenseverdier når $x \to \pm\infty$

2.66

a) 0

b) 0

c) 0

d) 2

2.67

a) 3

b) 2

c) 0

d) $-\dfrac{1}{2}$

2.68
a) 5
b) 2
c) ∞
d) $-\infty$

2.69
a) 0
b) 0
c) ∞
d) 3

2.70
a) e^x vinner: 0
b) e^x vinner: ∞
c) x vinner: 0
d) x vinner: ∞

2.71
a) $\dfrac{x^2}{e^x} \to 0$
b) 0 (skriv $x = -t$: $-\dfrac{t}{e^t} \to 0$)
c) $2 + e^{-x} \to 2$

2.72
a) Del på e^x: $\dfrac{4 - 3e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} \to 4$
b) $e^x \to 0$: $\dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

2.73
a) $T(0) = 90$ grader
b) 20. Kaffen nærmer seg romtemperaturen 20 grader.

2.74
a) $\dfrac{6000}{6} = 1000$
b) 6000. Bestanden nærmer seg 6000 fisk, som er bæreevnen.

2.75
a) 0
b) Legemiddelet forsvinner fra blodet etter lang tid.

2.76
a) 0
b) $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \to 1$
c) $\sqrt{4 + \dfrac{1}{x}} \to 2$

2.77
Grenseverdien er $\dfrac{a}{2}$, så $a = 10$.

2.78
a) $\dfrac{\infty}{\infty}$ er ikke 1. Del på x^2: grenseverdien er 3.
b) Nevneren har høyest grad, så grenseverdien er 0.

2.79
$$\frac{x^2 + 6x - x^2}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} = \frac{6}{\sqrt{1 + 6/x} + 1} \to 3$$

2.80
Mange svar er mulige, for eksempel
a) $\dfrac{4x + 1}{x}$
b) $\dfrac{1}{x}$
c) $\dfrac{x^2}{x + 1}$

2.81
a) e
b) $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2$

2.4.1 Kontinuerlige og diskontinuerlige funksjoner

2.82
Alle fire. $\dfrac{1}{x}$ er ikke definert i $x = 0$, men den er kontinuerlig i hele definisjonsmengden sin.

2.83
a) Begge er 2.
b) $f(1) = 2$
c) Ja.

2.84
Fra venstre: 4. Fra høyre: 5. Grenseverdien finnes ikke, så g er ikke kontinuerlig i $x = 2$.

2.85
a) 4
b) Nei, $h(2) = 3 \neq 4$.
c) $h(2) = 4$

2.86
$\lim_{x \to 3}(x + 3) = 6$, så $f(3) = 6$.

2.87
a) $x - 1 \to -1$
b) $x + 2 \to 1$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} \to \dfrac{1}{2}$

2.88
a) 30, 30 og 60 kroner
b) I $t = 1$ og $t = 2$. Der hopper prisen.

2.89
a) Sann.
b) Usann. Funksjonsverdien må også være lik grenseverdien.
c) Sann.

2.90
a) $f(x) = 2 - x$ når $x < 2$ og $f(x) = x - 2$ når $x \geqslant 2$.
b) Ja. Begge ensidige grenseverdier og $f(2)$ er 0.

2.91
$\lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$, så $a = 2$.

2.92
a) $x = 2$ er ikke i definisjonsmengden. Funksjonen er kontinuerlig overalt der den er definert.
b) $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ er ikke definert for $x = 2$, men $x + 2$ er det. Funksjonene er like for alle $x \neq 2$.

2.93
$f(0) = -1 < 0$ og $f(1) = 1 > 0$. Grafen kan ikke hoppe, så den må krysse x-aksen mellom 0 og 1.

2.94
La $g(x) = e^x + x - 3$. $g(0) = -2 < 0$ og $g(1) = e - 2 > 0$. g er kontinuerlig, så $g(x) = 0$ har en løsning mellom 0 og 1.

2.95
a) $x^2 + 2x + 4 \to 12$
b) $\sqrt{x} + 2 \to 4$

2.96
Mange svar er mulige, for eksempel
a) $f(x) = 0$ for $x < 0$ og $f(x) = 1$ for $x \geqslant 0$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

2.4.2 Funksjoner med delt forskrift

2.97
a) 5
b) 1
c) 13

2.98
a) 3
b) 4
c) 10
d) 9

2.99
a) Begge sider gir 4: kontinuerlig.
b) 4 fra venstre, 5 fra høyre: ikke kontinuerlig.
c) Begge sider gir 1: kontinuerlig.

2.100
$6 + k = 8$ gir $k = 2$.

2.101
a) $2a = 6$ gir $a = 3$.
b) $a - 1 = 2$ gir $a = 3$.
c) $a = 4$

2.102
Fra venstre: $\ln 1 = 0$. Fra høyre: $k - 2$. Så $k = 2$.

2.103
a) $P(x) = 99$ når $0 \leqslant x \leqslant 10$ og $P(x) = 99 + 20(x - 10)$ når $x > 10$.
b) $P(6) = 99$ og $P(14) = 179$
c) Ja, begge forskriftene gir 99 i $x = 10$.

2.104

a) $T(x) = 60 + 15x$ når $0 \leqslant x \leqslant 10$ og $T(x) = 210 + 12(x - 10)$ når $x > 10$.

b) $T(25) = 210 + 180 = 390$ kroner

2.105

Fra venstre: $x + 2 \to 4$. Fra høyre: $2x \to 4$. Grenseverdien er 4. (Funksjonen er ikke definert i $x = 2$.)

2.106

I $x = 0$: $b = 1$. I $x = 2$: $2a + b = 4$, så $a = \frac{3}{2}$.

2.107

$2k + 1 = 4$ gir $k = \frac{3}{2}$, ikke 2.

2.108

0 2 10

2.109

```
99
99
139
```

2.110

a) $-x$ når $x < 0$ og x når $x \geqslant 0$

b) $6 - 2x$ når $x < 3$ og $2x - 6$ når $x \geqslant 3$

c) 0 når $x < 0$ og $2x$ når $x \geqslant 0$

2.111

Fra høyre: 2. Fra venstre: $1 + a$. Så $a = 1$ og $b = 2$.

2.112

Mange svar er mulige. Linja må gå gjennom $(1, 1)$, for eksempel $f(x) = 2x - 1$ for $x > 1$.

2.5.1 Vertikale asymptoter

2.113

a) $x = 3$

b) $x = -4$

c) $x = 0$

d) $x = 3$

2.114

a) $x = -2$ og $x = 2$

b) $(x - 2)(x - 4)$: $x = 2$ og $x = 4$

c) Ingen, nevneren er aldri null.

d) $\frac{x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$ for $x \neq 0$: bare $x = 1$ (i $x = 0$ er det et hull).

2.115

a) $\frac{1}{x+2}$: hull i $x = 2$, asymptote $x = -2$.

b) $x + 1$: hull i $x = 1$, ingen asymptote.

c) $\frac{x+3}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$: hull i $x = -3$, asymptote $x = 1$.

2.116

a) $x = 2$. Fra venstre: $-\infty$. Fra høyre: ∞.

b) $x = -1$. Fra venstre: ∞. Fra høyre: $-\infty$.

c) $x = 4$. Fra venstre: $-\infty$. Fra høyre: ∞.

2.117

a) $x = 0$

b) $x = 2$

c) $x = 5$

d) $x = -1$

2.118

a) $x = 1$

b) $f(x) \to \infty$ fra begge sider, fordi nevneren alltid er positiv.

2.119

a) Nei.

b) Ja, $x = 0$ (der $e^x = 1$).

c) Ja, $x = 1$ (der $\ln x = 0$). Definisjonsmengden er $\langle 0, \to \rangle \setminus \{1\}$.

2.120

a) $\frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{x+5}$, så $x = 5$ er et hull. Bare $x = -5$ er asymptote.

b) Det er nevneren som avgjør. Nevneren er null i $x = 0$, og telleren er $1 \neq 0$ der, så $x = 0$ er en asymptote.

2.121

a) $x = 3$

b) $f(2{,}9) = \frac{6{,}8}{-0{,}1} = -68$ og $f(3{,}1) = \frac{7{,}2}{0{,}1} = 72$. Ja: $-\infty$ fra venstre og ∞ fra høyre.

2.122

$a = 4$

2.123

Telleren må forkorte bort en faktor: $a = 3$ (asymptote $x = -3$) eller $a = -3$ (asymptote $x = 3$).

2.124

Mange svar er mulige, for eksempel

a) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

b) $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$

2.125

a) $D_f = \langle 0, \to \rangle \setminus \{2\}$. Asymptoter: $x = 0$ og $x = 2$.

b) $D_f = [0, \to \rangle \setminus \{9\}$. Asymptote: $x = 9$.

2.126

```
-10
-100
100
10
```

2.127

a) ∞

b) Konsentrasjonen kan ikke bli uendelig stor. Stoffet kan for eksempel ikke løses opp i så lite væske.

2.5.2 Horisontale og skrå asymptoter

2.128

a) $y = 3$

b) $y = 0$

c) $y = 2$

d) $y = -5$

2.129

a) $y = 2$

b) $y = 5$

c) $y = 10$

d) $y = 0$

2.130

a) $x = -3$ og $y = 2$

b) $x = -1$, $x = 1$ og $y = 0$

c) $x = -2$, $x = 2$ og $y = 3$

2.131

a) $y = 2x + 1$

b) $y = x - 4$

c) $y = -x$

2.132

a) $x + \frac{1}{x}$: $y = x$

b) $x + 2 - \frac{2}{x+1}$: $y = x + 2$

c) $2x - 1 + \frac{4}{x}$: $y = 2x - 1$

2.133

a) $x - 1 + \frac{2}{x-1}$: $y = x - 1$

b) $x + 2 + \frac{8}{x-2}$: $y = x + 2$

c) $2x - 1 + \frac{1}{x+2}$: $y = 2x - 1$

2.134

a) Skrå, $y = x$

b) Horisontal, $y = 1$

c) Ingen (graden er to høyere)

d) Horisontal, $y = 0$

2.135

$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-2}$. Vertikal: $x = 2$. Skrå: $y = x + 2$.

2.136

a) $G(x) = 40 + \frac{5000}{x}$, så $y = 40$.

b) Når bedriften produserer svært mange enheter, nærmer kostnaden per enhet seg 40 kroner. De faste kostnadene fordeles på mange enheter.

2.137

a) Telleren har høyest grad. Det er ingen horisontal asymptote, men en skrå: $y = x$.

b) Det kan den. For eksempel krysser $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ asymptoten $y = 0$ i origo.

2.138

Vertikal i $x = -b = 2$, så $b = -2$.
Horisontal $y = a = 3$.

2.139

a) $x = 1$

b) $f(x) = x + 3 + \dfrac{3}{x-1}$, så $y = x + 3$.

c) Over, fordi $\dfrac{3}{x-1} > 0$ når $x > 1$.

2.140

$f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x^2}$, så $y = x + 2$.

2.141

```
0.1
0.01
0.001
```

Avstanden til asymptoten er $\dfrac{1}{x}$, som går mot 0.

2.142

Mange svar er mulige, for eksempel

a) $\dfrac{-2x}{x-1}$

b) $3x - 1 + \dfrac{1}{x}$

2.143

$\dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{2(x+2)}{x+1}$ for $x \neq 2$.
Hull i $x = 2$. Vertikal: $x = -1$.
Horisontal: $y = 2$.