1 Potenser, eksponentialfunksjoner og logaritmer

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten hjelpemidler. Fasiten står bakerst.

Formelark

POTENSER

Definisjon

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$$

Multiplikasjon

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Divisjon

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potens av en potens

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potens av et produkt

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Potens av en brøk

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Null som eksponent

$$a^0 = 1$$

Negativ eksponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

RØTTER

Definisjon av n-te rot

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Rot av et produkt

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Rot av en brøk

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Rot som potens

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Rasjonal eksponent

$$a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER OG TALLET *e*

Eksponentialfunksjon

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Vekstfaktor ved økning på p %

$$b = 1 + \frac{p}{100}$$

Vekstfaktor ved nedgang på p %

$$b = 1 - \frac{p}{100}$$

Tallet e

$$e = 2{,}718\,28\ldots$$

Modell med e

$$f(x) = a \cdot e^{kx}$$

Vekstfaktor i modellen

$$b = e^k$$

LOGARITMER

Briggske logaritmer

$$\lg a = x \Leftrightarrow 10^x = a$$

Naturlige logaritmer

$$\ln a = x \Leftrightarrow e^x = a$$

Opphever hverandre

$$10^{\lg a} = a \qquad \lg 10^x = x$$

Opphever hverandre

$$e^{\ln a} = a \qquad \ln e^x = x$$

Spesielle verdier

$$\lg 1 = \ln 1 = 0$$

Spesielle verdier

$$\lg 10 = \ln e = 1$$

LOGARITMESETNINGENE

Produkt

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

Kvotient

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Potens

$$\ln a^p = p \cdot \ln a$$

LIKNINGER OG ULIKHETER

Med grunntall e

$$e^x = c \Leftrightarrow x = \ln c$$

Med grunntall a

$$a^x = c \Leftrightarrow x = \frac{\ln c}{\ln a}$$

Naturlig logaritme

$$\ln x = c \Leftrightarrow x = e^c$$

Briggsk logaritme

$$\lg x = c \Leftrightarrow x = 10^c$$

Ta logaritmen: tegnet beholdes

$$a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$$

Grunntall mellom 0 og 1

$$\ln b < 0 \quad \text{når} \quad 0 < b < 1$$

- Isoler potensen eller logaritmen først.
- Sjekk løsningene av logaritmelikninger, og husk at ulikhetstegnet snur når du deler på et negativt tall.

1.1.1 Potensreglene

EKSEMPEL *Potenser og fortegn*

Regn ut

a) $(-3)^4$

b) -3^4

c) $(-1)^5$

Løsning

a) $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$. Fire negative faktorer gir positivt svar.

b) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$. Eksponenten gjelder bare 3.

c) $(-1)^5 = -1$. Fem negative faktorer gir negativt svar.

■

EKSEMPEL *Regn ut uten kalkulator*

Regn ut $\dfrac{2^3 \cdot 2^4}{2^5}$.

Løsning

I stedet for å regne ut hver potens, samler vi eksponentene først:

$$\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5} = 2^{3+4-5} = 2^2 = 4$$

■

EKSEMPEL *Store eksponenter*

Regn ut $\dfrac{3^{100} \cdot 3^2}{\left(3^{50}\right)^2}$.

Løsning

Teller: $3^{100} \cdot 3^2 = 3^{102}$. Nevner: $\left(3^{50}\right)^2 = 3^{100}$. Da er

$$\frac{3^{102}}{3^{100}} = 3^{102-100} = 3^2 = 9$$

Selv om 3^{100} har 48 sifre, blir svaret et lite tall. Det er potensreglene som gjør det mulig å se det.

■

EKSEMPEL *Potens av et produkt*

Skriv $\left(2x^3\right)^4$ uten parentes.

Løsning

$$\left(2x^3\right)^4 = 2^4 \cdot \left(x^3\right)^4 = 16x^{12}$$

■

EKSEMPEL *Regn ut potenser med null og negative eksponenter*

Regn ut

a) 5^{-2}

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

c) 7^0

Løsning

a) $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \dfrac{1}{\frac{1}{8}} = 8$

c) $7^0 = 1$

■

EKSEMPEL *Forenkle et uttrykk med negative eksponenter*

Forenkle $\dfrac{\left(a^3b^{-2}\right)^2}{a^{-1}b}$. Skriv svaret uten negative eksponenter.

Løsning

$$\frac{\left(a^3b^{-2}\right)^2}{a^{-1}b} = \frac{a^6b^{-4}}{a^{-1}b^1} = a^{6-(-1)}\,b^{-4-1} = a^7b^{-5} = \frac{a^7}{b^5}$$

Det er vanlig å skrive svaret uten negative eksponenter.

■

EKSEMPEL *Tall på standardform*

Et tall på standardform skrives $k \cdot 10^n$, der $1 \leqslant k < 10$ og n er et helt tall. Regn ut $\left(3 \cdot 10^5\right) \cdot \left(4 \cdot 10^{-2}\right)$, og skriv svaret på standardform.

Løsning

$$\left(3 \cdot 10^5\right) \cdot \left(4 \cdot 10^{-2}\right) = 3 \cdot 4 \cdot 10^{5+(-2)} = 12 \cdot 10^3 = 1{,}2 \cdot 10^4$$

I det siste steget skriver vi $12 = 1{,}2 \cdot 10^1$, slik at svaret blir på standardform.

■

1.1 Skriv som én potens.

a) $3^4 \cdot 3^2$

b) $\dfrac{7^9}{7^3}$

c) $\left(2^3\right)^5$

d) $a^5 \cdot a^2 \cdot a$

e) $\left(x^2\right)^3 \cdot x$

1.2 Skriv som én potens.

a) $5 \cdot 5^3$

b) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$

c) $\dfrac{a^7}{a}$

d) $\left(b^4\right)^4$

e) $x^3 \cdot y^3$

1.3 Regn ut.

a) 2^{-4}

b) $(-3)^2$

c) -3^2

d) $5^0 + 5^1$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

1.4 Regn ut.

a) 10^{-2}

b) $(-1)^7$

c) $(-1)^{100}$

d) $4^{-1} \cdot 4^0$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

f) $(-2)^{-3}$

1.5 Regn ut ved å samle eksponentene først.

a) $\frac{2^7}{2^4}$

b) $3^5 \cdot 3^{-3}$

c) $10^4 \cdot 10^{-6}$

d) $\frac{\left(5^2\right)^3}{5^5}$

1.6 Tallene under er så store at du ikke kan regne ut hver potens for seg. Bruk potensreglene til å regne ut uttrykkene.

a) $\frac{2^{100}}{2^{98}}$

b) $3^{50} \cdot 3^{-48}$

c) $\frac{\left(5^{10}\right)^5}{5^{49}}$

d) $\frac{7^{100}}{\left(7^{50}\right)^2}$

e) $10^{75} \cdot 10^{-73}$

1.7 Regn ut. Skriv først alle potensene med samme grunntall.

a) $2^{50} \cdot 5^{50}$

b) $\frac{4^{25}}{2^{48}}$

c) $\frac{9^{30}}{3^{58}}$

d) $\frac{8^{20}}{4^{29}}$

1.8 Forenkle. Skriv svaret uten negative eksponenter.

a) $a^3 \cdot a^{-5}$

b) $\left(x^2y\right)^3$

c) $\left(2a^{-1}\right)^3$

d) $\frac{\left(a^2b^{-3}\right)^2}{a^{-1}b^2}$

1.9 Forenkle. Skriv svaret uten negative eksponenter.

a) $\left(3x^2\right)^2 \cdot x^{-3}$

b) $\frac{\left(a^3b\right)^2}{(ab)^3}$

c) $\left(2x^{-2}y\right)^{-2}$

d) $\frac{a^n \cdot a^{n+1}}{a^{2n}}$

1.10 Jorda har en masse på $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, og månen har en masse på $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg.

a) Omtrent hvor mange ganger større masse har jorda enn månen?

b) Lyset går $3{,}0 \cdot 10^8$ meter per sekund. Et år er omtrent $3{,}2 \cdot 10^7$ sekunder. Hvor langt går lyset på ett år? Svar på standardform.

1.11 Regn ut og skriv svaret på standardform.

a) $\left(2{,}5 \cdot 10^{-3}\right) \cdot \left(4 \cdot 10^6\right)$

b) $\frac{9 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^{-4}}$

c) $\left(2 \cdot 10^5\right)^3$

1.12 En bakterie deler seg i to hvert 20. minutt. Vi starter med én bakterie.

a) Hvor mange bakterier er det etter 2 timer?

b) Skriv antall bakterier etter 10 timer som en potens av 2.

c) Bruk at $2^{10} \approx 10^3$ til å anslå antallet etter 10 timer.

1.13 Finn feilen i hver utregning, og rett den.

a) $a^2 \cdot a^3 = a^6$

b) $(2a)^3 = 2a^3$

c) $3^{-2} = -9$

1.14 Finn feilen i hver utregning, og rett den.

a) $\frac{2^{100}}{2^{50}} = 2^2$

b) $3^4 + 3^4 = 3^8$

c) $(-2)^4 = -16$

d) $5^3 \cdot 5^3 = 25^6$

1.15 *Python* Hva blir utskriften når programmet under kjøres?

```
x = 2
for n in range(4):
    print(x**n)
```

1.16 *Python* Python kan regne nøyaktig med svært store hele tall. Operatoren `//` er heltallsdivisjon. Hva blir utskriften?

```
print(2**100 // 2**98)
print(5**50 * 2**50 == 10**50)
```

1.17 Hvilket tall er størst, 2^{30} eller 3^{20}? Begrunn svaret uten å regne ut tallene.

1.18 Skriv som én potens.

a) $2^{101} - 2^{100}$

b) $3^{20} + 3^{20} + 3^{20}$

c) $4^{10} + 4^{10} + 4^{10} + 4^{10}$

1.19 Finn x.

a) $3^x \cdot 3^2 = 3^7$

b) $8^x = 2^9$

c) $2^x = \dfrac{1}{16}$

1.20 Finn x.

a) $2^x = 4^{50}$

b) $9^x = 27^{20}$

c) $2^x \cdot 4^x = 8^{10}$

1.1.2 Røtter og potenser med brøk som eksponent

EKSEMPEL *Regn ut røtter*

Regn ut, hvis det går.

a) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt[3]{125}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[4]{16}$

e) $\sqrt{-4}$

Løsning

a) 9, fordi $9^2 = 81$.

b) 5, fordi $5^3 = 125$.

c) -3, fordi $(-3)^3 = -27$.

d) 2, fordi $2^4 = 16$.

e) Ikke definert. Ingen reelle tall opphøyd i andre gir et negativt tall. ∎

EKSEMPEL *Forenkle et rotuttrykk*

Skriv $\sqrt{50}$ så enkelt som mulig.

Løsning

$50 = 25 \cdot 2$, og 25 er et kvadrattall. Da er

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Vi sier at $5\sqrt{2}$ er forenklet, fordi tallet under rottegnet ikke lenger har noe kvadrattall som faktor. ∎

EKSEMPEL *Legge sammen røtter*

Regn ut $\sqrt{12} + \sqrt{27}$.

Løsning

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Når rottegnet inneholder det samme tallet, kan vi legge sammen som med $2x + 3x = 5x$. ∎

EKSEMPEL *Rot i nevneren*

Skriv $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ uten rot i nevneren.

Løsning

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

∎

EKSEMPEL *Regn ut potenser med brøk som eksponent*

Regn ut

a) $8^{2/3}$

b) $16^{-3/4}$

Løsning

a) $8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

b) $16^{-3/4} = \dfrac{1}{16^{3/4}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

∎

EKSEMPEL *Røtter som potenser*

Skriv som én potens av x.

a) $x\sqrt{x}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Løsning

a) $x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{1/2} = x^{1+1/2} = x^{3/2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3}$

Denne omskrivingen trenger du igjen når du skal derivere uttrykk med røtter. ∎

EKSEMPEL *Store tall under rottegnet*

Regn ut $\sqrt{2^{100}}$ og $\sqrt[3]{8^{20}}$. Svar med én potens av 2.

Løsning

$$\sqrt{2^{100}} = \left(2^{100}\right)^{1/2} = 2^{100/2} = 2^{50}$$

$$\sqrt[3]{8^{20}} = \left((2^3)^{20}\right)^{1/3} = (2^{60})^{1/3} = 2^{20}$$

Tallene er alt for store til å regne ut hver for seg, men med potensreglene går det på én linje. ∎

1.21 Regn ut.

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt[3]{64}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $25^{1/2}$

e) $32^{1/5}$

1.22 Regn ut.

a) $\sqrt{4 \cdot 25}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

c) $\sqrt[3]{1000}$

d) $\sqrt{10^6}$

e) $\sqrt{2^{100}}$

1.23 Regn ut.

a) $4^{3/2}$

b) $27^{2/3}$

c) $16^{-1/4}$

d) $100^{-3/2}$

1.24 Bruk potensreglene til å regne ut.

a) $\left(2^{60}\right)^{1/3}$

b) $\sqrt{3^{100}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{5^{90}}}{5^{28}}$

d) $\left(10^{100}\right)^{1/50}$

1.25 Skriv som én potens av x.

a) $\sqrt[3]{x}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $x^3\sqrt{x}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

e) $\left(\sqrt{x}\right)^3$

1.26 Forenkle.

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

b) $\left(x^{2/3}\right)^6$

c) $x^{1/2} \cdot x^{3/2}$

d) $\dfrac{\sqrt{x^3}}{x}$

1.27 Skriv med rottegn.

a) $x^{1/4}$

b) $x^{2/3}$

c) $x^{-1/2}$

1.28 *Python* Hva blir utskriften når programmet under kjøres?

```
tall = [4, 9, 16, 25]
for x in tall:
    print(x, x**0.5)
```

1.29 a) Bruk potensreglene til å vise at $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$.

b) Boka definerer $a^{p/q}$ bare for $a > 0$. Hvorfor er det likevel greit å skrive $\sqrt[3]{-8} = -2$?

1.30 Hvilket tall er størst, $\sqrt{2}$ eller $\sqrt[3]{3}$? Begrunn svaret uten kalkulator.

1.2.1 Eksponentialfunksjoner

EKSEMPEL *Startverdi og vekstfaktor*

Finn startverdien og vekstfaktoren, og forklar hva de betyr.

a) $f(x) = 200 \cdot 1{,}08^x$

b) $g(x) = 50 \cdot 0{,}75^x$

Løsning

a) Startverdien er 200 og vekstfaktoren 1,08. Funksjonsverdien øker med 8 % hver gang x øker med 1.

b) Startverdien er 50 og vekstfaktoren 0,75. Funksjonsverdien minker med 25 % hver gang x øker med 1, fordi det er 75 % igjen. ∎

EKSEMPEL *Fra prosent til vekstfaktor*

a) Finn vekstfaktoren når noe øker med 12 % per år.

b) Finn vekstfaktoren når noe minker med 3 % per måned.

c) Vekstfaktoren er 1,4. Hvor mange prosent øker størrelsen med?

Løsning

a) $1 + 0{,}12 = 1{,}12$

b) $1 - 0{,}03 = 0{,}97$

c) $1{,}4 = 140\,\%$, altså en økning på 40 %. ∎

EKSEMPEL *En bil som taper verdi*

En bil koster 400 000 kroner. Verdien synker med 15 % per år.

a) Sett opp en funksjon $V(x)$ for verdien etter x år.

b) Hva er bilen verdt etter 2 år?

Løsning

a) Det er 85 % igjen hvert år, så vekstfaktoren er 0,85:

$$V(x) = 400\,000 \cdot 0{,}85^x$$

b) $V(2) = 400\,000 \cdot 0{,}85^2 = 400\,000 \cdot 0{,}7225 = 289\,000$ kroner.

Legg merke til at verdien har sunket med 27,75 % på to år, ikke med 30 %. Prosentene kan ikke legges sammen.

■

EKSEMPEL *Bakterier som dobles*

En bakteriekultur har 500 bakterier. Antallet dobles hver time. Hvor mange bakterier er det etter 5 timer?

Løsning

Vekstfaktoren er 2, så $N(t) = 500 \cdot 2^t$ og

$$N(5) = 500 \cdot 2^5 = 500 \cdot 32 = 16\,000$$

■

1.31 Finn vekstfaktoren.

a) Øker med 8 %

b) Minker med 8 %

c) Øker med 100 %

d) Minker med 2,5 %

e) Øker med 0,1 %

1.32 Hvor mange prosent øker eller minker størrelsen med når vekstfaktoren er

a) 1,25

b) 0,7

c) 3

d) 0,99

1.33 Funksjonen $f(x) = 3 \cdot 2^x$ er gitt. Regn ut uten hjelpemidler.

a) $f(0)$

b) $f(4)$

c) $f(-2)$

d) $f(10)$

1.34 Funksjonen $g(x) = 1000 \cdot 0{,}5^x$ er gitt. Regn ut uten hjelpemidler.

a) $g(1)$

b) $g(3)$

c) $g(-1)$

1.35 Finn startverdien og vekstfaktoren, og avgjør om funksjonen beskriver vekst eller nedgang. Hvor mange prosent er endringen per tidsenhet?

a) $f(x) = 50 \cdot 1{,}2^x$

b) $g(x) = 7 \cdot 0{,}95^x$

c) $h(x) = 0{,}5 \cdot 4^x$

1.36 Sett opp en funksjon for situasjonen. Bruk x for tiden.

a) Et folketall er 5000 og øker med 3 % per år.

b) En maskin er verdt 80 000 kroner og taper 12 % av verdien per år.

c) En bakteriekultur veier 10 g og dobles hver time.

d) Lyset svekkes med 40 % for hver meter ned i vannet. I overflaten er lysstyrken 100 %.

1.37 Avgjør om veksten er lineær eller eksponentiell. Finn stigningstallet eller vekstfaktoren.

a) $3, 6, 12, 24$

b) $10, 7, 4, 1$

c) $100, 80, 64, 51{,}2$

d) $2, 5, 8, 11$

1.38 Du setter 20 000 kroner i banken med 4 % rente per år.

a) Hvor mye har du etter 1 år?

b) Hvor mye har du etter 2 år?

c) Sett opp en funksjon $B(x)$ for beløpet etter x år.

1.39 En bil koster 300 000 kroner og taper 20 % av verdien hvert år.

a) Hva er bilen verdt etter 1 år?

b) Hva er bilen verdt etter 2 år?

c) Hva er bilen verdt etter 3 år?

d) Hvor mange prosent har verdien sunket etter 3 år?

1.40 Finn feilen i hver påstand, og rett den.

a) En økning på 7 % gir vekstfaktor 7.

b) $1000 \cdot 1{,}1^2 = 1100^2$

c) To år med 10 % nedgang gir 20 % nedgang.

1.41 Hva blir utskriften? Hvilken eksponentialfunksjon beskriver `antall` etter `time` timer?

Python

```
antall = 100
for time in range(4):
    print(time, antall)
    antall = antall * 3
```

1.42 Hva blir utskriften? Du får vite at $1{,}2^3 = 1{,}728$ og $1{,}2^4 \approx 2{,}07$.

Python

```
belop = 1000
ar = 0
while belop < 2000:
    belop = belop * 1.2
    ar = ar + 1
print(ar)
```

1.43 Grafen til $f(x) = a \cdot b^x$ går gjennom punktene som er gitt. Finn a og b.

a) $(0, 5)$ og $(1, 15)$

b) $(0, 200)$ og $(2, 50)$

1.44 Mengden av en medisin i blodet halveres hver fjerde time. Ved start er det 80 mg.

a) Hvor mye er det etter 4 timer?

b) Hvor mye er det etter 12 timer?

c) Sett opp en funksjon for mengden etter t timer.

1.45 a) Er det det samme å øke med 10 % to år på rad som å øke med 21 % én gang?

b) En pris øker med 50 % og minker deretter med 50 %. Hvor mange prosent av den opprinnelige prisen er den nye prisen?

1.2.2 Tallet e

EKSEMPEL *Forenkle uttrykk med e*

Skriv som én potens av e.

a) $e^{2x} \cdot e^x$

b) $\dfrac{(e^x)^4}{e^x}$

c) $\dfrac{e^{x+1}}{e}$

Løsning

a) $e^{2x+x} = e^{3x}$

b) $\dfrac{e^{4x}}{e^x} = e^{4x-x} = e^{3x}$

c) $e^{x+1-1} = e^x$

■

EKSEMPEL *Kontinuerlig rente*

Et beløp vokser etter modellen $f(x) = 100 \cdot e^{0{,}05\,x}$, der x er antall år.

a) Hva er startverdien?

b) Hva er vekstfaktoren, og hvor mange prosent vokser beløpet med per år? Du får vite at $e^{0{,}05} \approx 1{,}0513$.

Løsning

a) $f(0) = 100 \cdot e^0 = 100$.

b) Vekstfaktoren er $e^{0{,}05} \approx 1{,}0513$, så beløpet vokser med omtrent 5,13 % per år. Det er litt mer enn 5 %, fordi renten hele tiden legges til.

■

1.46 Skriv som én potens av e.

a) $e^4 \cdot e^3$

b) $\dfrac{e^9}{e^2}$

c) $\left(e^3\right)^2$

d) $e^{-1} \cdot e^{-2}$

e) $\sqrt{e^6}$

1.47 Skriv så enkelt som mulig.

a) $e^{3x} \cdot e^{2x}$

b) $\dfrac{e^{4x}}{e^x}$

c) $\left(e^{2x}\right)^3$

d) $e^x \cdot e^{-x}$

e) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$

1.48 Skriv uten negative eksponenter.

a) e^{-2}

b) $3e^{-x}$

c) $\dfrac{e^{-x}}{e^{-3x}}$

1.49 Finn startverdien og vekstfaktoren.

a) $f(x) = 20e^{0{,}5\,x}$

b) $g(x) = 3e^{-x}$

c) $h(x) = 100e^{2x}$

1.50 Avgjør om funksjonen vokser eller avtar.

a) $4e^{0{,}02\,x}$

b) $4e^{-\,0{,}02\,x}$

c) $4e^{x/3}$

d) $\dfrac{4}{e^x}$

1.51 Antall bakterier er $N(t) = 50e^{0{,}2\,t}$, der t er antall timer. Svar eksakt.

a) $N(0)$

b) $N(5)$

c) $N(10)$

d) Hva er vekstfaktoren per time?

1.52 Bruk at $e^{0,1} \approx 1{,}105$ og $e^{-0,1} \approx 0{,}905$.

a) Hvor mange prosent vokser $1000e^{0,1\,t}$ med per tidsenhet?

b) Hvor mange prosent avtar $1000e^{-0,1\,t}$ med per tidsenhet?

1.53 Ordne tallene etter størrelse, fra minst til størst, uten kalkulator.

a) 2^3, e^3, 3^3

b) 2^{-1}, e^{-1}, 3^{-1}

1.54 Finn feilen i hver utregning, og rett den.

a) $e^2 \cdot e^3 = e^6$

b) $e^x + e^{2x} = e^{3x}$

c) $2e^x = e^{2x}$

1.55 Multipliser ut.

a) $e^x(e^x + 1)$

b) $(e^x + 1)^2$

c) $(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$

1.56 Faktoriser.

a) $e^{2x} + e^x$

b) $e^{3x} - 2e^x$

c) $xe^x + e^x$

1.57 Hva blir utskriften?

Python

```
import math
print(round(math.exp(1), 3))
print(math.exp(0))
```

1.58 Hva blir utskriften? Regn ut for hånd.

Python

```
for n in [1, 2, 4]:
    print(n, (1 + 1/n)**n)
```

1.59 Vis at $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

1.60 Tallet k er slik at $e^k = 2$. Mellom hvilke to heltall ligger k? Begrunn svaret.

1.3.1 Logaritmer

EKSEMPEL *Regn ut briggske logaritmer*

Regn ut.

a) $\lg 10\,000$

b) $\lg 0{,}001$

c) $\lg 1$

d) $\lg \sqrt{10}$

Løsning

a) $10\,000 = 10^4$, så $\lg 10\,000 = 4$.

b) $0{,}001 = 10^{-3}$, så $\lg 0{,}001 = -3$.

c) $1 = 10^0$, så $\lg 1 = 0$.

d) $\sqrt{10} = 10^{1/2}$, så $\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$.

EKSEMPEL *Regn ut naturlige logaritmer*

Regn ut.

a) $\ln e$

b) $\ln 1$

c) $\ln e^3$

d) $\ln \frac{1}{e}$

Løsning

a) $e = e^1$, så $\ln e = 1$.

b) $1 = e^0$, så $\ln 1 = 0$.

c) $\ln e^3 = 3$.

d) $\frac{1}{e} = e^{-1}$, så $\ln \frac{1}{e} = -1$.

EKSEMPEL *Forenkle uttrykk med logaritmer*

Forenkle.

a) $e^{\ln 5}$

b) $\ln e^{2x}$

c) $10^{\lg 7}$

Løsning

a) $e^{\ln 5} = 5$

b) $\ln e^{2x} = 2x$

c) $10^{\lg 7} = 7$

1.61 Regn ut.

a) $\lg 1000$

b) $\lg 10$

c) $\lg 0{,}01$

d) $\lg 10^7$

e) $\lg 1$

1.62 Regn ut.

a) $\lg \sqrt{10}$

b) $\lg \sqrt[3]{100}$

c) $\lg \frac{1}{\sqrt{10}}$

d) $\lg\left(10\sqrt{10}\right)$

1.63 Regn ut.

a) $\ln e^4$

b) $\ln \frac{1}{e}$

c) $\ln e^{-3}$

d) $\ln \sqrt[3]{e}$

e) $\ln 1$

1.64 Regn ut.

a) $\ln\left(e\sqrt{e}\right)$

b) $\ln\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

c) $\ln\left(e^2 \cdot e^3\right)$

d) $\ln\dfrac{e^5}{e^2}$

1.65 Forenkle.

a) $10^{\lg 5}$

b) $e^{\ln 2}$

c) $\ln e^{x^2}$

d) $\lg 10^{2x-1}$

e) $e^{\ln x}$ for $x > 0$

1.66 Regn ut.

a) $10^{\lg 4} \cdot 10^{\lg 2}$

b) $\left(e^{\ln 3}\right)^2$

c) $\ln e^3 + \lg 10^2$

d) $e^{\ln 7} + 10^{\lg 3}$

1.67 Mellom hvilke to hele tall ligger logaritmen? Bruk at $e \approx 2{,}72$ og $e^2 \approx 7{,}39$.

a) $\lg 50$

b) $\lg 0{,}3$

c) $\ln 5$

d) $\ln 0{,}5$

e) $\lg 12\,345$

1.68 Er uttrykket definert? Regn det ut hvis det er definert.

a) $\lg 0$

b) $\ln(-1)$

c) $\lg 0{,}0001$

d) $\ln e^{-5}$

1.69 Finn x ved å bruke definisjonen av logaritmen.

a) $\lg x = 2$

b) $\ln x = 1$

c) $\lg x = -1$

d) $\ln x = 0$

1.70 Hvor mange siffer har tallet?

a) 10^{12}

b) $5 \cdot 10^8$

c) 2^{20}. Bruk at $\lg 2 \approx 0{,}301$.

1.71 Hva blir utskriften?

Python

```
import math
for k in range(-2, 3):
    print(k, math.log10(10**k))
```

1.72 Hva blir utskriften?

Python

```
import math
print(math.log(math.e))
print(math.log(1))
print(math.log10(100))
```

1.73 Finn feilen i hver påstand, og rett den.

a) $\lg 1000 = 300$

b) $\ln e^2 = e^2$

c) $\lg(-10) = -1$

d) $\ln 0 = 1$

1.74 Hvor mange siffer har 5^{100}? Bruk at $\lg 5 \approx 0{,}699$.

1.75 Bruk at $2^{10} = 1024$ til å vise at $\lg 2 > 0{,}3$.

1.3.2 Logaritmefunksjonen

EKSEMPEL *Definisjonsmengden til et logaritmeuttrykk*

Finn definisjonsmengden til

a) $f(x) = \ln(x-2)$

b) $g(x) = \lg(5-x)$

Løsning

a) $x - 2 > 0$ gir $x > 2$, så $D_f = \langle 2, \to \rangle$.

b) $5 - x > 0$ gir $x < 5$, så $D_g = \langle \leftarrow, 5 \rangle$. ∎

EKSEMPEL *Punkter på grafene*

Punktet $(3, e^3)$ ligger på grafen til e^x. Hvilket punkt på grafen til $\ln x$ svarer til dette punktet?

Løsning

$(e^3, 3)$. Det stemmer, fordi $\ln e^3 = 3$. ∎

EKSEMPEL *pH-verdi*

a) Konsentrasjonen er $[H^+] = 10^{-3}$. Hva er pH-verdien?

b) Hvor mange ganger større er konsentrasjonen ved pH 3 enn ved pH 5?

Løsning

a) $\text{pH} = -\lg 10^{-3} = -(-3) = 3$.

b) Ved pH 3 er konsentrasjonen 10^{-3}, og ved pH 5 er den 10^{-5}. Forholdet er $\dfrac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^2 = 100$. ∎

1.76 Finn definisjonsmengden.

a) $\ln(x-4)$

b) $\lg(x+1)$

c) $\ln(3x)$

d) $\ln(6-2x)$

e) $\lg\left(x^2\right)$

1.77 Funksjonen $f(x) = \ln x$ er gitt. Regn ut.

a) $f(e)$

b) $f\left(e^{-2}\right)$

c) $f\left(\sqrt{e}\right)$

d) $f(1)$

1.78 Er $\ln x$ positiv, negativ eller null?

a) $x = 0{,}5$

b) $x = 1$

c) $x = 3$

d) $x = \dfrac{1}{e}$

1.79 Løs likningene.

a) $\ln x = 4$

b) $\lg x = 5$

c) $\ln x = -2$

d) $\lg x = 0$

1.80 Punktene ligger på grafen til e^x. Hvilke punkter på grafen til $\ln x$ svarer til dem?

a) $(0, 1)$

b) $(1, e)$

c) $\left(-1, \dfrac{1}{e}\right)$

d) $(\ln 2, 2)$

1.81 pH-verdien er $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+]$.

a) Finn pH når $[\text{H}^+] = 10^{-6}$.

b) Finn pH når $[\text{H}^+] = 10^{-2}$.

c) Finn $[\text{H}^+]$ når pH er 9.

d) Hvor mange ganger større er $[\text{H}^+]$ ved pH 4 enn ved pH 7?

1.82 Styrken til et jordskjelv på Richters skala er $M = \lg \dfrac{A}{A_0}$, der A er utslaget på en seismograf og A_0 er en fast referanseverdi.

a) Finn M når $A = 10^5 A_0$.

b) Hvor mange ganger større er utslaget ved styrke 6 enn ved styrke 4?

c) Finn A uttrykt ved A_0 når $M = 7$.

1.83 Løs ulikhetene. Husk definisjonsmengden.

a) $\ln x > 0$

b) $\lg x \geqslant 2$

c) $\ln x < 1$

d) $\lg x \leqslant -1$

1.84 Hvilket tall er størst? Begrunn uten kalkulator.

a) $\ln 3$ eller $\ln 4$

b) $\lg 0{,}5$ eller 0

c) $\ln 10$ eller $\lg 10$

1.85 Funksjonen $g(x) = \ln(x - 2)$ er gitt.

a) Hvordan får du grafen til g fra grafen til $\ln x$?

b) Finn definisjonsmengden og nullpunktet til g.

1.86 Finn nullpunktene.

a) $\ln(x - 1)$

b) $\lg(2x)$

c) $\ln\left(x^2\right)$

1.87 Hva blir utskriften?

Python

```
import math
x = 1
while math.log10(x) < 2:
    x = x * 2
print(x)
```

1.88 Hva blir utskriften? Bruk at $\ln 2 \approx 0{,}69$. Hvilket mønster ser du?

Python

```
import math
for x in [1, 2, 4, 8]:
    print(x, round(math.log(x), 2))
```

1.89 Finn alle x der $\ln x = \lg x$.

1.90 Forklar hvorfor grafene til e^x og $\ln x$ ikke har noen felles punkter.

1.4.1 Logaritmesetningene

EKSEMPEL *Regn ut med logaritmesetningene*

Regn ut uten hjelpemidler.

a) $\lg 2 + \lg 5$

b) $\lg 200 - \lg 2$

c) $\ln 8 - 3 \ln 2$

Løsning

a) $\lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) = \lg 10 = 1$

b) $\lg 200 - \lg 2 = \lg \dfrac{200}{2} = \lg 100 = 2$

c) $\ln 8 - 3 \ln 2 = \ln 8 - \ln 2^3 = \ln 8 - \ln 8 = 0$

■

EKSEMPEL *Skriv som én logaritme*

Skriv som én logaritme.

a) $2 \ln a + \ln b$

b) $\ln x - 3 \ln y$

Løsning

a) $2 \ln a + \ln b = \ln a^2 + \ln b = \ln\left(a^2 b\right)$

b) $\ln x - 3\ln y = \ln x - \ln y^3 = \ln \frac{x}{y^3}$ ▪

EKSEMPEL *Del opp en logaritme*

Skriv som en sum av logaritmer, der hver logaritme bare inneholder én bokstav eller ett tall.

a) $\ln\left(x^2y^3\right)$

b) $\lg(1000x)$

Løsning

a) $\ln\left(x^2y^3\right) = \ln x^2 + \ln y^3 = 2\ln x + 3\ln y$

b) $\lg(1000x) = \lg 1000 + \lg x = 3 + \lg x$ ▪

EKSEMPEL *Regn ut fra kjente logaritmer*

Bruk at $\lg 2 \approx 0{,}301$ og $\lg 3 \approx 0{,}477$ til å finne

a) $\lg 6$

b) $\lg 12$

c) $\lg 1{,}5$

Løsning

a) $\lg 6 = \lg(2 \cdot 3) = \lg 2 + \lg 3 \approx 0{,}778$

b) $\lg 12 = \lg\left(2^2 \cdot 3\right) = 2\lg 2 + \lg 3 \approx 1{,}079$

c) $\lg 1{,}5 = \lg \frac{3}{2} = \lg 3 - \lg 2 \approx 0{,}176$ ▪

EKSEMPEL *Lydnivå i desibel*

Lydnivået i desibel er $L = 10\lg \frac{I}{I_0}$, der I er lydintensiteten og I_0 er en fast referanseverdi. Hvor mye øker lydnivået når intensiteten dobles? Bruk at $\lg 2 \approx 0{,}301$.

Løsning

$$10\lg \frac{2I}{I_0} = 10\left(\lg 2 + \lg \frac{I}{I_0}\right) = 10\lg 2 + 10\lg \frac{I}{I_0} = 10\lg 2 + L$$

Lydnivået øker med $10\lg 2 \approx 3$ desibel. To like høyttalere er altså bare 3 dB høyere enn én. ▪

1.91 Regn ut uten hjelpemidler.

a) $\lg 5 + \lg 20$

b) $\lg 2 + \lg 50$

c) $\lg 300 - \lg 3$

d) $\ln 12 - \ln 4 - \ln 3$

e) $\lg 25 + \lg 4$

1.92 Regn ut uten hjelpemidler.

a) $2\lg 5 + \lg 4$

b) $3\ln e - \ln e^2$

c) $\lg 8 - 3\lg 2$

d) $\ln e^5 - 2\ln e$

e) $\frac{1}{2}\lg 100$

1.93 Skriv som én logaritme.

a) $\ln 2 + \ln 7$

b) $\ln 30 - \ln 5$

c) $3\ln 2$

d) $2\ln 5 - \ln 5$

e) $\ln 4 + \ln 3 - \ln 6$

1.94 Skriv som én logaritme.

a) $\ln x + \ln y$

b) $2\ln x - \ln y$

c) $\ln a - 2\ln b + \ln c$

d) $\frac{1}{2}\ln x$

e) $\ln(x+1) + \ln(x-1)$

1.95 Del opp, slik at hver logaritme bare inneholder én bokstav eller ett tall.

a) $\ln(ab)$

b) $\ln a^3$

c) $\ln \frac{a}{b^2}$

d) $\ln \frac{a^2b^3}{c}$

e) $\lg(10a)$

1.96 Del opp.

a) $\ln \sqrt{ab}$

b) $\ln\left(a\sqrt{b}\right)$

c) $\ln \frac{1}{a}$

d) $\ln\left(e^3a\right)$

1.97 Bruk at $\lg 2 \approx 0{,}301$ og $\lg 3 \approx 0{,}477$ til å finne

a) $\lg 4$

b) $\lg 9$

c) $\lg 18$

d) $\lg 0{,}5$

e) $\lg 5$

1.98 La $a = \ln 2$ og $b = \ln 5$. Skriv uttrykkene med a og b.

a) $\ln 10$

b) $\ln 20$

c) $\ln 0{,}4$

d) $\ln 1000$

e) $\ln 2{,}5$

1.99 Regn ut.

a) $e^{\ln 3 + \ln 4}$

b) $e^{2\ln 5}$

c) $10^{\lg 6 - \lg 2}$

d) $e^{-\ln 2}$

1.100 Finn feilen i hver påstand, og rett den.

a) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$

b) $\ln a \cdot \ln b = \ln(ab)$

c) $(\ln x)^2 = 2\ln x$

d) $\dfrac{\ln x}{\ln y} = \ln\dfrac{x}{y}$

1.101 Lydnivået er $L = 10\lg\dfrac{I}{I_0}$.

a) Finn L når $I = 10^6 I_0$.

b) Hvor mye øker L når intensiteten blir 1000 ganger så stor?

c) Hvor mange ganger større er intensiteten ved 80 dB enn ved 50 dB?

1.102 *Python* Hva blir utskriften, og hvilken logaritmesetning viser programmet?

```
import math
print(round(math.log(8), 4))
print(round(3 * math.log(2), 4))
```

1.103 *Python* Hva blir utskriften?

```
import math
print(round(math.log10(5000) - math.log10(5), 6))
```

1.104 Hvor mange siffer har tallet $2^{50} \cdot 5^{40}$?

1.105 Forenkle $\ln\left(\sqrt{e^3} \cdot e^{-1}\right)$.

1.106 Vis at hvis $a^x = b$, så er $x = \dfrac{\ln b}{\ln a}$.

1.5.1 Eksponentiallikninger

EKSEMPEL *Likninger med samme grunntall*

Løs likningene.

a) $2^{x+1} = 32$

b) $9^x = 27$

Løsning

a) $32 = 2^5$, så $x + 1 = 5$ og $x = 4$.

b) $9^x = \left(3^2\right)^x = 3^{2x}$ og $27 = 3^3$. Da er $2x = 3$ og $x = \dfrac{3}{2}$.

■

EKSEMPEL *Løs med logaritmer*

Løs likningene. Svar eksakt.

a) $3^x = 7$

b) $e^{2x} = 5$

c) $4e^{0{,}5\,x} - 1 = 11$

Løsning

a) $\ln 3^x = \ln 7$ gir $x\ln 3 = \ln 7$, så $x = \dfrac{\ln 7}{\ln 3}$.

b) $2x = \ln 5$, så $x = \dfrac{\ln 5}{2}$.

c) $4e^{0{,}5\,x} = 12$ gir $e^{0{,}5\,x} = 3$, så $0{,}5\,x = \ln 3$ og $x = 2\ln 3$.

■

EKSEMPEL *Andregradslikning i e^x*

Løs likningene.

a) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

b) $e^{2x} - e^x - 2 = 0$

Løsning

a) $u^2 - 5u + 6 = 0$ gir $u = 2$ eller $u = 3$. Altså er $e^x = 2$ eller $e^x = 3$, og $x = \ln 2$ eller $x = \ln 3$.

b) $u^2 - u - 2 = 0$ gir $u = 2$ eller $u = -1$. Likningen $e^x = -1$ har ingen løsning, så den eneste løsningen er $x = \ln 2$.

■

1.107 Løs likningene uten hjelpemidler.

a) $3^x = 27$

b) $2^{x+2} = 16$

c) $10^{2x} = 1000$

d) $5^x = \dfrac{1}{25}$

e) $8^x = 4$

1.108 Løs likningene uten hjelpemidler.

a) $2^{3x-1} = 32$

b) $9^x = 3^{x+1}$

c) $4^x = 2^{x+3}$

d) $27^x = 9$

1.109 Løs likningene. Svar eksakt.

a) $e^x = 10$

b) $e^{2x} = 9$

c) $10^x = 50$

d) $3^x = 20$

e) $e^{-x} = 2$

1.110 Isoler potensen først, og løs likningene. Svar eksakt.

a) $2e^x = 14$

b) $e^x + 3 = 8$

c) $5 \cdot 2^x = 40$

d) $4e^{3x} - 1 = 7$

e) $100 \cdot 1{,}1^x = 200$

1.111 Har likningen løsning? Løs den hvis den har det.

a) $e^x = -4$

b) $2^x = 0$

c) $e^x = 1$

d) $3^x + 5 = 2$

1.112 Løs likningene.

a) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

b) $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$

c) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

d) $e^{2x} = 5e^x$

1.113 Løs likningene.

a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

b) $9^x - 3^x - 6 = 0$

1.114 Løs likningene. Svar eksakt.

a) $2000 \cdot 1{,}05^x = 4000$

b) $500 \cdot 0{,}8^x = 100$

c) $50e^{0{,}03\,t} = 150$

d) $1000 \cdot 2^{t/3} = 8000$

1.115 Mengden av et stoff er $N(t) = 100e^{-0{,}1\,t}$. Når er halvparten igjen? Svar eksakt.

1.116 En størrelse vokser med vekstfaktor b per år. Finn doblingstiden.

a) $b = 2$

b) $b = \sqrt{2}$

c) $b = 1{,}07$. Svar eksakt.

1.117 Finn feilen i hver løsning, og rett den.

a) $3^x = 12$ gir $x = 4$.

b) $2e^x = 10$ gir $e^x = 8$.

c) $e^{2x} = 7$ gir $x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2}$.

d) $e^x = 0$ gir $x = \ln 0$.

1.118 *Python* Hva blir utskriften, og hva forteller den om løsningen av $3^x = 100$?

```
x = 0
while 3**x < 100:
    x = x + 1
print(x)
```

1.119 *Python* Hva blir utskriften? Du får vite at $0{,}9^6 \approx 0{,}53$ og $0{,}9^7 \approx 0{,}48$.

```
mengde = 100
timer = 0
while mengde > 50:
    mengde = mengde * 0.9
    timer = timer + 1
print(timer)
```

1.120 Løs likningen $3^x = 2^{x+1}$. Svar eksakt.

1.121 Løs likningen $e^x + e^{-x} = 2$.

1.122 Løs likningen $2^x \cdot 3^x = 36$ uten hjelpemidler.

1.5.2 Logaritmelikninger

EKSEMPEL *Løs grunnlikninger*

Løs likningene.

a) $\ln x = 3$

b) $\lg(2x) = 2$

c) $2\lg x + 1 = 7$

Løsning

a) $x = e^3$

b) $2x = 10^2 = 100$, så $x = 50$.

c) $2\lg x = 6$ gir $\lg x = 3$, så $x = 10^3 = 1000$.

■

EKSEMPEL *En falsk løsning*

Løs likningen $\lg x + \lg(x-3) = 1$.

Løsning

$\lg(x(x-3)) = 1$ gir $x(x-3) = 10$, altså $x^2 - 3x - 10 = 0$. Det gir $x = 5$ eller $x = -2$.

For $x = -2$ er $\lg x$ ikke definert, så $x = -2$ er en falsk løsning. Den eneste løsningen er $x = 5$. Sjekk: $\lg 5 + \lg 2 = \lg 10 = 1$.

■

EKSEMPEL *Logaritmer på begge sider*

Løs likningen $\ln(x+2) - \ln x = \ln 3$.

Løsning

$\ln \dfrac{x+2}{x} = \ln 3$ gir $\dfrac{x+2}{x} = 3$, altså $x + 2 = 3x$ og $x = 1$. Begge logaritmene er definert for $x = 1$, så løsningen er gyldig.

■

EKSEMPEL *Andregradslikning i* $\ln x$

Løs likningen $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$.

Løsning

$u^2 - 3u + 2 = 0$ gir $u = 1$ eller $u = 2$. Altså er $\ln x = 1$ eller $\ln x = 2$, og $x = e$ eller $x = e^2$.

■

1.123 Løs likningene. Svar eksakt.

a) $\lg x = 4$

b) $\ln x = 5$

c) $\lg x = -3$

d) $\ln x = \dfrac{1}{2}$

e) $\lg x = \dfrac{1}{2}$

1.124 Løs likningene. Svar eksakt.

a) $2\ln x = 8$

b) $\lg x + 3 = 5$

c) $4 - \ln x = 1$

d) $3\lg x - 2 = 4$

1.125 Løs likningene. Svar eksakt.

a) $\ln(x-2)=0$

b) $\lg(3x)=2$

c) $\ln(2x+1)=1$

d) $\lg\frac{x}{5}=-1$

1.126 Løs likningene.

a) $\lg x+\lg 5=1$

b) $\ln x-\ln 2=\ln 7$

c) $3\ln x=\ln 27$

d) $\lg x-\lg 4=2$

1.127 Løs likningene, og forkast falske løsninger.

a) $\lg x+\lg(x-9)=1$

b) $\ln x+\ln(x+1)=\ln 6$

c) $\lg(x+3)+\lg x=1$

d) $2\lg x=\lg(x+6)$

1.128 Løs likningene.

a) $\ln(2x)=\ln(x+4)$

b) $\lg(x+1)=\lg(2x-3)$

c) $\ln\left(x^2\right)=\ln(4x)$

1.129 Løs likningene.

a) $(\ln x)^2-\ln x-2=0$

b) $(\lg x)^2-3\lg x+2=0$

c) $(\ln x)^2=4\ln x$

1.130 Svar eksakt.

a) Finn $[H^+]$ når pH er 3,5.

b) Finn $[H^+]$ når pH er 8.

c) Lydnivået $L=10\lg\frac{I}{I_0}$ er 90 dB. Finn I uttrykt ved I_0.

d) Et jordskjelv har styrke $M=\lg\frac{A}{A_0}=6{,}5$. Finn A uttrykt ved A_0.

1.131 Finn feilen i hver løsning, og rett den.

a) $\ln x=3$ gir $x=3e$.

b) $\lg(2x)=1$ gir $2x=1$.

c) $\ln x+\ln(x+1)=0$ gir $x(x+1)=0$.

1.132 Hva blir utskriften? Bruk at $\ln 2+\ln 3=\ln 6\approx 1{,}7918$.

Python

```
import math
for x in [2, -3]:
    if x > 0:
        print(x, round(math.log(x) + math.log(x + 1), 4), round(math.log(6), 4))
    else:
        print(x, "ikke gyldig")
```

1.133 Hva blir utskriften? Bruk at $e^2\approx 7{,}39$.

Python

```
import math
x = 1
while math.log(x) < 2:
    x = x + 0.5
print(x)
```

1.134 Løs likningen $\lg\left(x^2\right)=(\lg x)^2$.

1.135 Løs likningen $\ln(\ln x)=0$.

1.136 Løs likningen $x^{\ln x}=e^4$.

1.137 Løs likningen $\lg x+\lg x^2+\lg x^3=12$.

1.5.3 Ulikheter med eksponential- og logaritmeuttrykk

EKSEMPEL *Løs eksponentialulikheter*

Løs ulikhetene.

a) $e^{2x}\geqslant 9$

b) $0{,}5^x<\frac{1}{8}$

Løsning

a) $2x\geqslant\ln 9=2\ln 3$, så $x\geqslant\ln 3$.

b) $\frac{1}{8}=0{,}5^3$. Siden $0{,}5^x$ er avtakende, er $0{,}5^x<0{,}5^3$ når $x>3$.

■

EKSEMPEL *Løs logaritmeulikheter*

Løs ulikhetene.

a) $\lg(x-1)\geqslant 1$

b) $\ln x<2$

Løsning

a) $x-1\geqslant 10$ gir $x\geqslant 11$. Alle disse x gir $x-1>0$, så løsningen er $x\geqslant 11$.

b) $x<e^2$, men $\ln x$ er bare definert for $x>0$. Løsningen er $0<x<e^2$.

■

1.138 Løs ulikhetene uten hjelpemidler.

a) $3^x>81$

b) $2^x\leqslant\frac{1}{8}$

c) $10^x\geqslant 0{,}1$

d) $5^{x-1}<25$

e) $e^x>1$

1.139 Løs ulikhetene. Svar eksakt.

a) $e^x<6$

b) $e^{3x}\geqslant 8$

c) $2^x>7$

d) $10^x\leqslant 3$

1.140 Løs ulikhetene uten hjelpemidler.

a) $0{,}5^x > 4$

b) $0{,}1^x \leqslant 0{,}001$

c) $0{,}7^x < 0{,}49$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$

1.141 Løs ulikhetene. Svar eksakt.

a) $0{,}9^x < 0{,}5$

b) $0{,}6^x \geqslant 0{,}2$

c) $0{,}95^x > 0{,}8$

1.142 Løs ulikhetene. Husk definisjonsmengden.

a) $\lg x > 2$

b) $\ln x \leqslant 0$

c) $\ln(x-3) < 0$

d) $\lg(2x) \geqslant 1$

e) $\ln x > -1$

1.143 For hvilke x er ulikheten oppfylt?

a) $e^x > 0$

b) $2^x < -1$

c) $e^x \geqslant 1$

d) $\ln x > 0$

1.144 En bil er verdt $400\,000 \cdot 0{,}8^x$ kroner etter x år. Etter hvor mange hele år er den verdt mindre enn 100 000 kroner? Bruk at $\frac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}8} \approx 6{,}2$.

1.145 En by har 8000 innbyggere, og folketallet øker med 2 % per år. Etter hvor mange hele år er det flere enn 10 000 innbyggere? Bruk at $\frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}02} \approx 11{,}3$.

1.146 Mengden av en medisin i blodet er $200e^{-0{,}3\,t}$ mg. Når er det mindre enn 20 mg igjen? Svar eksakt, og finn antall hele timer. Bruk at $\ln 10 \approx 2{,}30$.

1.147 Finn feilen i hver løsning, og rett den.

a) $0{,}5^x < 0{,}25$ gir $x < 2$.

b) $\ln x < 3$ gir $x < e^3$.

c) $e^x > -5$ har ingen løsning.

1.148 Hva blir utskriften? Du får vite at $1{,}02^{11} \approx 1{,}24$ og $1{,}02^{12} \approx 1{,}27$.

Python

```
befolkning = 8000
ar = 0
while befolkning <= 10000:
    befolkning = befolkning * 1.02
    ar = ar + 1
print(ar)
```

1.149 Hva blir utskriften, og hvilken ulikhet løser programmet?

Python

```
x = 0
while 0.8**x >= 0.5:
    x = x + 1
print(x)
```

1.150 To kontoer vokser etter modellene $A(x) = 2000 \cdot 1{,}02^x$ og $B(x) = 1000 \cdot 1{,}06^x$. Når er $B(x) > A(x)$? Svar eksakt.

1.151 Løs ulikheten $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$.

1.152 Løs ulikheten $(\ln x)^2 < 1$.

Fasit

1.1.1 Potensreglene

1.1

a) 3^6

b) 7^6

c) 2^{15}

d) a^8

e) x^7

1.2

a) 5^4

b) 2^{12}

c) a^6

d) b^{16}

e) $(xy)^3$

1.3

a) $\frac{1}{16}$

b) 9

c) -9

d) 6

e) $\frac{9}{4}$

1.4

a) $\frac{1}{100} = 0{,}01$

b) -1

c) 1

d) $\frac{1}{4}$

e) $5^2 = 25$

f) $\frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

1.5

a) $2^3 = 8$

b) $3^2 = 9$

c) $10^{-2} = 0{,}01$

d) $5^1 = 5$

1.6

a) $2^{100-98} = 2^2 = 4$

b) $3^{50-48} = 3^2 = 9$

c) $\frac{5^{50}}{5^{49}} = 5^1 = 5$

d) $\frac{7^{100}}{7^{100}} = 7^0 = 1$

e) $10^2 = 100$

1.7

a) $(2 \cdot 5)^{50} = 10^{50}$

b) $4^{25} = \left(2^2\right)^{25} = 2^{50}$, så $\frac{2^{50}}{2^{48}} = 2^2 = 4$.

c) $9^{30} = \left(3^2\right)^{30} = 3^{60}$, så $\frac{3^{60}}{3^{58}} = 3^2 = 9$.

d) $8^{20} = 2^{60}$ og $4^{29} = 2^{58}$, så $\frac{2^{60}}{2^{58}} = 2^2 = 4$.

1.8

a) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

b) x^6y^3

c) $8a^{-3} = \frac{8}{a^3}$

d) $\frac{a^4b^{-6}}{a^{-1}b^2} = a^5b^{-8} = \frac{a^5}{b^8}$

1.9

a) $9x^4 \cdot x^{-3} = 9x$

b) $\frac{a^6b^2}{a^3b^3} = a^3b^{-1} = \frac{a^3}{b}$

c) $2^{-2}x^4y^{-2} = \frac{x^4}{4y^2}$

d) $a^{n+n+1-2n} = a^1 = a$

1.10

a) $\frac{6{,}0 \cdot 10^{24}}{7{,}3 \cdot 10^{22}} \approx 0{,}82 \cdot 10^2 = 82$. Jorda har omtrent 82 ganger så stor masse.

b) $3{,}0 \cdot 10^8 \cdot 3{,}2 \cdot 10^7 = 9{,}6 \cdot 10^{15}$ meter.

1.11

a) $10 \cdot 10^3 = 1{,}0 \cdot 10^4$

b) $3 \cdot 10^{12-(-4)} = 3 \cdot 10^{16}$

c) $2^3 \cdot 10^{15} = 8 \cdot 10^{15}$

1.12

a) 2 timer er 6 delinger, så $2^6 = 64$ bakterier.

b) 10 timer er 30 delinger, så 2^{30} bakterier.

c) $2^{30} = \left(2^{10}\right)^3 \approx \left(10^3\right)^3 = 10^9$, altså omtrent en milliard bakterier.

1.13

a) Ved multiplikasjon legges eksponentene sammen: $a^2 \cdot a^3 = a^5$.

b) Eksponenten gjelder begge faktorene i parentesen: $(2a)^3 = 2^3a^3 = 8a^3$.

c) En negativ eksponent betyr «én delt på»: $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

1.14

a) Ved divisjon trekkes eksponentene fra hverandre, de deles ikke: $\frac{2^{100}}{2^{50}} = 2^{50}$.

b) Det finnes ingen potensregel for summer: $3^4 + 3^4 = 2 \cdot 3^4 = 162$.

c) Eksponenten gjelder hele parentesen, og fire negative faktorer gir et positivt svar: $(-2)^4 = 16$.

d) Grunntallet skal ikke ganges: $5^3 \cdot 5^3 = 5^6$.

1.15

```
1
2
4
8
```

`range(4)` gir $n = 0, 1, 2, 3$, så programmet skriver ut 2^0, 2^1, 2^2 og 2^3.

1.16

```
4
True
```

$\frac{2^{100}}{2^{98}} = 2^2 = 4$, og $5^{50} \cdot 2^{50} = (5 \cdot 2)^{50} = 10^{50}$, så sammenligningen er sann.

1.17

$2^{30} = \left(2^3\right)^{10} = 8^{10}$ og $3^{20} = \left(3^2\right)^{10} = 9^{10}$. Siden $9 > 8$, er 3^{20} størst.

1.18

a) $2^{101} - 2^{100} = 2 \cdot 2^{100} - 2^{100} = 2^{100}$

b) $3 \cdot 3^{20} = 3^{21}$

c) $4 \cdot 4^{10} = 4^{11}$ $\left(= 2^{22}\right)$

1.19

a) $3^{x+2} = 3^7$, så $x = 5$.

b) $8^x = \left(2^3\right)^x = 2^{3x}$, så $3x = 9$ og $x = 3$.

c) $\frac{1}{16} = 2^{-4}$, så $x = -4$.

1.20

a) $4^{50} = 2^{100}$, så $x = 100$.

b) $3^{2x} = 3^{60}$, så $2x = 60$ og $x = 30$.

c) $2^x \cdot 2^{2x} = 2^{3x}$ og $8^{10} = 2^{30}$, så $3x = 30$ og $x = 10$.

1.1.2 Røtter og potenser med brøk som eksponent

1.21

a) 7

b) 4

c) -3

d) 5

e) 2

1.22

a) $\sqrt{100} = 10$

b) $\sqrt{36} = 6$

c) 10

d) $10^3 = 1000$

e) $2^{100/2} = 2^{50}$

1.23

a) $\left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

b) $\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{100}\right)^3} = \dfrac{1}{1000}$

1.24

a) $2^{60/3} = 2^{20}$

b) $3^{100/2} = 3^{50}$

c) $\dfrac{5^{30}}{5^{28}} = 5^2 = 25$

d) $10^{100/50} = 10^2 = 100$

1.25

a) $x^{1/3}$

b) $x^{-1/2}$

c) $x^{3+1/2} = x^{7/2}$

d) $x^{1/2-1/3} = x^{1/6}$

e) $x^{3/2}$

1.26

a) $x^{1/2+1/3} = x^{5/6}$

b) $x^{2/3 \cdot 6} = x^4$

c) $x^{1/2+3/2} = x^2$

d) $\dfrac{x^{3/2}}{x^1} = x^{1/2} = \sqrt{x}$

1.27

a) $\sqrt[4]{x}$

b) $\sqrt[3]{x^2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1.28

```
4 2.0
9 3.0
16 4.0
25 5.0
```

`x**0.5` er $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

1.29

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2}$, så $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 2^{1/2} \cdot 2^{3/2} = 2^2 = 4$.

b) Definisjonen av $\sqrt[n]{a}$ krever bare $a \geqslant 0$ når n er et partall. Tredjeroten er definert for alle tall, og $(-2)^3 = -8$. Det er potensskrivemåten $(-8)^{1/3}$ som ikke er definert, fordi potensreglene da kan gi motstridende svar.

1.30

Opphøy begge tallene i 6:

$\left(2^{1/2}\right)^6 = 2^3 = 8$ og $\left(3^{1/3}\right)^6 = 3^2 = 9$.

Siden $9 > 8$ og begge tallene er positive, er $\sqrt[3]{3}$ størst.

1.2.1 Eksponentialfunksjoner

1.31

a) 1,08

b) 0,92

c) 2

d) 0,975

e) 1,001

1.32

a) Øker med 25 %

b) Minker med 30 %

c) Øker med 200 %

d) Minker med 1 %

1.33

a) 3

b) $3 \cdot 16 = 48$

c) $3 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

d) $3 \cdot 1024 = 3072$

1.34

a) 500

b) $1000 \cdot \dfrac{1}{8} = 125$

c) $1000 \cdot 2 = 2000$

1.35

a) Startverdi 50, vekstfaktor 1,2. Vekst på 20 %.

b) Startverdi 7, vekstfaktor 0,95. Nedgang på 5 %.

c) Startverdi 0,5, vekstfaktor 4. Vekst på 300 %.

1.36

a) $f(x) = 5000 \cdot 1{,}03^x$

b) $V(x) = 80\,000 \cdot 0{,}88^x$

c) $m(x) = 10 \cdot 2^x$

d) $L(x) = 100 \cdot 0{,}6^x$

1.37

a) Eksponentiell med vekstfaktor 2.

b) Lineær med stigningstall -3.

c) Eksponentiell med vekstfaktor 0,8.

d) Lineær med stigningstall 3.

1.38

a) $20\,000 \cdot 1{,}04 = 20\,800$ kroner

b) $20\,800 \cdot 1{,}04 = 21\,632$ kroner

c) $B(x) = 20\,000 \cdot 1{,}04^x$

1.39

a) 240 000 kroner

b) 192 000 kroner

c) 153 600 kroner

d) $0{,}8^3 = 0{,}512$, så verdien har sunket med 48,8 %.

1.40

a) Vekstfaktoren er 1,07.

b) Potensen gjelder bare 1,1: $1000 \cdot 1{,}21 = 1210$.

c) $0{,}9^2 = 0{,}81$, altså 19 % nedgang.

1.41

```
0 100
1 300
2 900
3 2700
```

$f(x) = 100 \cdot 3^x$

1.42

4. Beløpet er under 2000 etter 3 år og over 2000 etter 4 år.

1.43

a) $a = 5$ og $5b = 15$, så $b = 3$.

b) $a = 200$ og $200b^2 = 50$, så $b^2 = \dfrac{1}{4}$ og $b = \dfrac{1}{2}$.

1.44

a) 40 mg

b) Tre halveringer: $80 \cdot \dfrac{1}{8} = 10$ mg

c) $M(t) = 80 \cdot 0{,}5^{t/4}$

1.45

a) Ja, fordi $1{,}1^2 = 1{,}21$.

b) $1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$, altså 75 % av den opprinnelige prisen.

1.2.2 Tallet e

1.46

a) e^7

b) e^7

c) e^6

d) e^{-3}

e) e^3

1.47

a) e^{5x}

b) e^{3x}

c) e^{6x}

d) $e^0 = 1$

e) e^{x+2}

1.48

a) $\dfrac{1}{e^2}$

b) $\dfrac{3}{e^x}$

c) e^{2x}

1.49

a) Startverdi 20, vekstfaktor $e^{0,5}$

b) Startverdi 3, vekstfaktor $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

c) Startverdi 100, vekstfaktor e^2

1.50
a) Vokser
b) Avtar
c) Vokser
d) Avtar, fordi $\frac{4}{e^x} = 4e^{-x}$

1.51
a) 50
b) $50e$
c) $50e^2$
d) $e^{0,2}$

1.52
a) Omtrent 10,5 %
b) Omtrent 9,5 %

1.53
a) $2^3 < e^3 < 3^3$, fordi $2 < e < 3$.
b) $3^{-1} < e^{-1} < 2^{-1}$, fordi $\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$.

1.54
a) $e^{2+3} = e^5$
b) Det finnes ingen potensregel for summer. Uttrykket kan skrives $e^x(1 + e^x)$.
c) $2e^x$ er to ganger e^x. $e^{2x} = e^x \cdot e^x$, som er noe annet.

1.55
a) $e^{2x} + e^x$
b) $e^{2x} + 2e^x + 1$
c) $e^{2x} - e^{-2x}$

1.56
a) $e^x(e^x + 1)$
b) $e^x\left(e^{2x} - 2\right)$
c) $e^x(x + 1)$

1.57

```
2.718
1.0
```

`math.exp(x)` er e^x.

1.58

```
1 2.0
2 2.25
4 2.44140625
```

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ og $\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}$. Tallene nærmer seg e.

1.59
$\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = 4$

1.60
$e^0 = 1 < 2 < e \approx 2{,}72 = e^1$. Siden e^x er voksende, er $0 < k < 1$.

1.3.1 Logaritmer

1.61
a) 3
b) 1
c) -2
d) 7
e) 0

1.62
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{2}$

1.63
a) 4
b) -1
c) -3
d) $\frac{1}{3}$
e) 0

1.64
a) $\frac{3}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) 5
d) 3

1.65
a) 5
b) 2
c) x^2
d) $2x - 1$
e) x

1.66
a) $4 \cdot 2 = 8$
b) $3^2 = 9$
c) $3 + 2 = 5$
d) $7 + 3 = 10$

1.67
a) Mellom 1 og 2
b) Mellom -1 og 0
c) Mellom 1 og 2
d) Mellom -1 og 0
e) Mellom 4 og 5

1.68
a) Ikke definert
b) Ikke definert
c) -4
d) -5

1.69
a) $x = 100$
b) $x = e$
c) $x = 0{,}1$
d) $x = 1$

1.70
a) 13
b) 9
c) $\lg 2^{20} = 20 \lg 2 \approx 6{,}02$, så tallet har 7 siffer. (Det er 1 048 576.)

1.71

```
-2 -2.0
-1 -1.0
0 0.0
1 1.0
2 2.0
```

1.72

```
1.0
0.0
2.0
```

1.73
a) $\lg 1000 = 3$
b) $\ln e^2 = 2$
c) $\lg(-10)$ er ikke definert. Det er $\lg 0{,}1 = -1$.
d) $\ln 0$ er ikke definert. Det er $\ln 1 = 0$.

1.74
$\lg 5^{100} = 100 \lg 5 \approx 69{,}9$, så tallet har 70 siffer.

1.75
$2^{10} > 1000 = 10^3$. Siden lg er voksende, er $\lg 2^{10} > 3$, altså $10 \lg 2 > 3$ og $\lg 2 > 0{,}3$.

1.3.2 Logaritmefunksjonen

1.76
a) $x > 4$
b) $x > -1$
c) $x > 0$
d) $x < 3$
e) $x \neq 0$

1.77
a) 1
b) -2
c) $\frac{1}{2}$
d) 0

1.78
a) Negativ
b) Null
c) Positiv
d) Negativ ($\ln \frac{1}{e} = -1$)

1.79
a) $x = e^4$
b) $x = 100\,000$
c) $x = e^{-2}$
d) $x = 1$

1.80
a) $(1, 0)$
b) $(e, 1)$
c) $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$
d) $(2, \ln 2)$

1.81
a) 6
b) 2
c) 10^{-9}
d) $10^3 = 1000$ ganger

1.82
a) $M = 5$
b) $10^2 = 100$ ganger
c) $A = 10^7 A_0$

1.83
a) $x > 1$
b) $x \geqslant 100$
c) $0 < x < e$
d) $0 < x \leqslant 0{,}1$

1.84
a) $\ln 4$, fordi $\ln x$ er voksende.
b) 0, fordi $\lg x < 0$ når $0 < x < 1$.
c) $\ln 10$, fordi $\lg 10 = 1$ og $\ln 10 > \ln e = 1$.

1.85
a) Grafen til $\ln x$ flyttes 2 enheter mot høyre.
b) $D_g = \langle 2, \rightarrow \rangle$. Nullpunktet er $x = 3$, fordi $\ln 1 = 0$.

1.86
a) $x = 2$
b) $x = \frac{1}{2}$
c) $x = 1$ og $x = -1$

1.87
128. Programmet dobler x til $\lg x \geqslant 2$, altså til $x \geqslant 100$. Toerpotensene er $64 < 100 < 128$.

1.88

```
1 0.0
2 0.69
4 1.39
8 2.08
```

Når x dobles, øker $\ln x$ med $\ln 2 \approx 0{,}69$.

1.89
Begge er 0 når $x = 1$. For $x > 1$ er $\ln x > \lg x$, og for $0 < x < 1$ er $\ln x < \lg x$. Altså er $x = 1$ eneste løsning.

1.90
For alle x er $e^x > x$. Grafen til e^x ligger altså over linja $y = x$. Grafen til $\ln x$ er speilbildet om $y = x$, så den ligger under linja. Da kan grafene ikke møtes.

1.4.1 Logaritmesetningene

1.91
a) $\lg 100 = 2$
b) $\lg 100 = 2$
c) $\lg 100 = 2$
d) $\ln 1 = 0$
e) $\lg 100 = 2$

1.92
a) $\lg 25 + \lg 4 = 2$
b) $3 - 2 = 1$
c) $\lg 8 - \lg 8 = 0$
d) $5 - 2 = 3$
e) 1

1.93
a) $\ln 14$
b) $\ln 6$
c) $\ln 8$
d) $\ln 5$
e) $\ln 2$

1.94
a) $\ln(xy)$
b) $\ln \frac{x^2}{y}$
c) $\ln \frac{ac}{b^2}$
d) $\ln \sqrt{x}$
e) $\ln\left(x^2 - 1\right)$

1.95
a) $\ln a + \ln b$
b) $3 \ln a$
c) $\ln a - 2 \ln b$
d) $2 \ln a + 3 \ln b - \ln c$
e) $1 + \lg a$

1.96
a) $\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} \ln b$
b) $\ln a + \frac{1}{2} \ln b$
c) $-\ln a$
d) $3 + \ln a$

1.97
a) $2 \lg 2 \approx 0{,}602$
b) $2 \lg 3 \approx 0{,}954$
c) $\lg 2 + 2 \lg 3 \approx 1{,}255$
d) $-\lg 2 \approx -0{,}301$
e) $1 - \lg 2 \approx 0{,}699$

1.98
a) $a + b$
b) $2a + b$
c) $a - b$
d) $3a + 3b$
e) $b - a$

1.99
a) $e^{\ln 12} = 12$
b) $e^{\ln 25} = 25$
c) $10^{\lg 3} = 3$
d) $e^{\ln(1/2)} = \frac{1}{2}$

1.100
a) Det finnes ingen regel for logaritmen til en sum. Riktig er $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
b) Riktig er $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
c) Riktig er $\ln x^2 = 2 \ln x$.
d) Riktig er $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

1.101
a) 60 dB
b) $10 \lg 1000 = 30$ dB
c) $10^3 = 1000$ ganger

1.102

```
2.0794
2.0794
```

$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$.

1.103
3.0, fordi $\lg 5000 - \lg 5 = \lg 1000 = 3$.

1.104
$2^{50} \cdot 5^{40} = 2^{10} \cdot (2 \cdot 5)^{40} = 1024 \cdot 10^{40}$, som har 44 siffer.

1.105
$\ln e^{3/2} + \ln e^{-1} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

1.106
Ta ln på begge sider: $\ln a^x = \ln b$, altså $x \ln a = \ln b$ og $x = \frac{\ln b}{\ln a}$.

1.5.1 Eksponentiallikninger

1.107
a) $x = 3$
b) $x = 2$
c) $x = \frac{3}{2}$
d) $x = -2$
e) $2^{3x} = 2^2$, så $x = \frac{2}{3}$

1.108
a) $3x - 1 = 5$, så $x = 2$
b) $2x = x + 1$, så $x = 1$
c) $2x = x + 3$, så $x = 3$
d) $3x = 2$, så $x = \frac{2}{3}$

1.109
a) $x = \ln 10$
b) $x = \ln 3$
c) $x = \lg 50$
d) $x = \frac{\ln 20}{\ln 3}$
e) $x = -\ln 2$

1.110
a) $x = \ln 7$
b) $x = \ln 5$
c) $2^x = 8$, så $x = 3$
d) $e^{3x} = 2$, så $x = \frac{\ln 2}{3}$
e) $x = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}1}$

1.111
a) Ingen løsning
b) Ingen løsning
c) $x = 0$
d) $3^x = -3$, ingen løsning

1.112
a) $e^x = 1$ eller $e^x = 2$, så $x = 0$ eller $x = \ln 2$
b) $e^x = 2$ eller $e^x = 4$, så $x = \ln 2$ eller $x = \ln 4$
c) $e^x = 2$ (og $e^x = -3$ gir ingen løsning), så $x = \ln 2$
d) $e^x = 5$, så $x = \ln 5$

1.113

a) Med $u = 2^x$: $u^2 - 6u + 8 = 0$ gir $u = 2$ eller $u = 4$, så $x = 1$ eller $x = 2$.

b) Med $u = 3^x$: $u^2 - u - 6 = 0$ gir $u = 3$ (og $u = -2$ gir ingen løsning), så $x = 1$.

1.114

a) $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05}$

b) $x = \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}8}$

c) $t = \dfrac{\ln 3}{0{,}03}$

d) $2^{t/3} = 8 = 2^3$, så $t = 9$

1.115

$e^{-0{,}1\,t} = \dfrac{1}{2}$ gir $-0{,}1\,t = -\ln 2$, så $t = 10\ln 2 \approx 6{,}9$.

1.116

a) 1 år

b) $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, så 2 år

c) $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}07} \approx 10{,}2$ år

1.117

a) Den ukjente står i eksponenten. Riktig er $x = \dfrac{\ln 12}{\ln 3}$.

b) Del på 2: $e^x = 5$.

c) $2x = \ln 7$, så $x = \dfrac{\ln 7}{2}$.

d) e^x er aldri 0, så likningen har ingen løsning.

1.118

5, fordi $3^4 = 81 < 100$ og $3^5 = 243$. Løsningen ligger mellom 4 og 5.

1.119

7. Mengden er over 50 etter 6 timer og under 50 etter 7 timer.

1.120

$x\ln 3 = (x+1)\ln 2$ gir $x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 2$, så $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$.

1.121

Gang med e^x: $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$, altså $(e^x - 1)^2 = 0$. Da er $e^x = 1$ og $x = 0$.

1.122

$6^x = 36 = 6^2$, så $x = 2$.

1.5.2 Logaritmelikninger

1.123

a) $x = 10\,000$

b) $x = e^5$

c) $x = 0{,}001$

d) $x = \sqrt{e}$

e) $x = \sqrt{10}$

1.124

a) $x = e^4$

b) $x = 100$

c) $x = e^3$

d) $x = 100$

1.125

a) $x = 3$

b) $x = \dfrac{100}{3}$

c) $x = \dfrac{e-1}{2}$

d) $x = 0{,}5$

1.126

a) $5x = 10$, så $x = 2$

b) $\dfrac{x}{2} = 7$, så $x = 14$

c) $x^3 = 27$, så $x = 3$

d) $\dfrac{x}{4} = 100$, så $x = 400$

1.127

a) $x^2 - 9x - 10 = 0$ gir $x = 10$ eller $x = -1$. Bare $x = 10$ er gyldig.

b) $x^2 + x - 6 = 0$ gir $x = 2$ eller $x = -3$. Bare $x = 2$ er gyldig.

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$ gir $x = 2$ eller $x = -5$. Bare $x = 2$ er gyldig.

d) $x^2 = x + 6$ gir $x = 3$ eller $x = -2$. Bare $x = 3$ er gyldig.

1.128

a) $2x = x + 4$, så $x = 4$

b) $x + 1 = 2x - 3$, så $x = 4$

c) $x^2 = 4x$ gir $x = 0$ eller $x = 4$. For $x = 0$ er logaritmene ikke definert, så $x = 4$.

1.129

a) $\ln x = 2$ eller $\ln x = -1$, så $x = e^2$ eller $x = \dfrac{1}{e}$

b) $\lg x = 1$ eller $\lg x = 2$, så $x = 10$ eller $x = 100$

c) $\ln x = 0$ eller $\ln x = 4$, så $x = 1$ eller $x = e^4$

1.130

a) $10^{-3{,}5}$

b) 10^{-8}

c) $I = 10^9 I_0$

d) $A = 10^{6{,}5} A_0$

1.131

a) $x = e^3$

b) $2x = 10$, så $x = 5$

c) $\ln(x(x+1)) = 0$ gir $x(x+1) = 1$, ikke 0. Da er $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (den negative løsningen er falsk).

1.132

```
2 1.7918 1.7918
-3 ikke gyldig
```

Programmet sjekker løsningene av $\ln x + \ln(x+1) = \ln 6$.

1.133

7.5. Programmet øker x med 0,5 til $\ln x \geqslant 2$, altså til $x \geqslant e^2 \approx 7{,}39$.

1.134

$2\lg x = (\lg x)^2$ gir $\lg x = 0$ eller $\lg x = 2$, så $x = 1$ eller $x = 100$.

1.135

$\ln x = 1$, så $x = e$.

1.136

$\ln x \cdot \ln x = 4$ gir $\ln x = \pm 2$, så $x = e^2$ eller $x = e^{-2}$.

1.137

$6\lg x = 12$, så $\lg x = 2$ og $x = 100$.

1.5.3 Ulikheter med eksponential- og logaritmeuttrykk

1.138

a) $x > 4$

b) $x \leqslant -3$

c) $x \geqslant -1$

d) $x < 3$

e) $x > 0$

1.139

a) $x < \ln 6$

b) $x \geqslant \ln 2$

c) $x > \dfrac{\ln 7}{\ln 2}$

d) $x \leqslant \lg 3$

1.140

a) $x < -2$

b) $x \geqslant 3$

c) $x > 2$

d) $x \leqslant -2$

1.141

a) $x > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$

b) $x \leqslant \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}6}$

c) $x < \dfrac{\ln 0{,}8}{\ln 0{,}95}$

1.142

a) $x > 100$

b) $0 < x \leqslant 1$

c) $3 < x < 4$

d) $x \geqslant 5$

e) $x > \dfrac{1}{e}$

1.143

a) Alle x

b) Ingen x

c) $x \geqslant 0$

d) $x > 1$

1.144

$0{,}8^x < 0{,}25$ gir $x > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}8} \approx 6{,}2$, altså

etter 7 år.

1.145

$1{,}02^x > 1{,}25$ gir $x > \dfrac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}02} \approx 11{,}3$,

altså etter 12 år.

1.146

$e^{-\,0{,}3\,t} < 0{,}1$ gir $-\,0{,}3\,t < -\ln 10$, så

$t > \dfrac{\ln 10}{0{,}3} \approx 7{,}7$. Etter 8 timer.

1.147

a) $0{,}5^x$ er avtakende, så tegnet snur: $x > 2$.

b) Definisjonsmengden mangler: $0 < x < e^3$.

c) e^x er alltid positiv, så ulikheten gjelder for alle x.

1.148

12. Etter 11 år er det omtrent 9950 innbyggere, og etter 12 år omtrent 10 150.

1.149

4, fordi $0{,}8^3 = 0{,}512 \geqslant 0{,}5$ og $0{,}8^4 = 0{,}4096 < 0{,}5$. Programmet finner det minste heltallet x der $0{,}8^x < 0{,}5$.

1.150

$\left(\dfrac{1{,}06}{1{,}02}\right)^x > 2$ gir $x > \dfrac{\ln 2}{\ln \dfrac{1{,}06}{1{,}02}}$.

1.151

Med $u = e^x$: $(u-1)(u-2) < 0$ gir $1 < e^x < 2$, så $0 < x < \ln 2$.

1.152

$-1 < \ln x < 1$, så $\dfrac{1}{e} < x < e$.